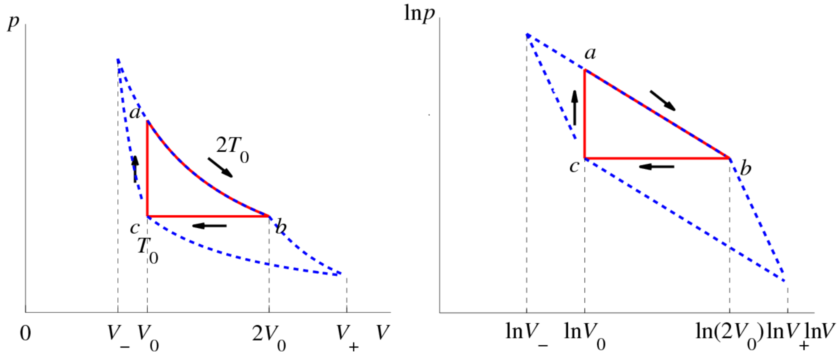
Megoldott termodinamika feladatok 7.

7. feladat*. Az adiabaták a körfolyamatot a c és b sarokpontokban érintik. Az előző feladat szerint a b pontban, ahol a nyomás ugyanakkora, mint az c pontban, de a hőmérséklet kétszer akkora, az entrópia $C_p \ln 2$-vel nagyobb ($n = 1\,\mathrm{mol}$), azaz $S_c + C_p \ln 2$.

A körfolyamat köré illesztett Carnot-folyamat legkisebb térfogata az adiabatikus állapotegyenlet alapján $V_- = V_0 2^{-1/(\kappa-1)}$, a legnagyobb térfogat pedig $V_+ = 2V_0 2^{1/(\kappa-1)}$ (l. 1. ábra bal panel).

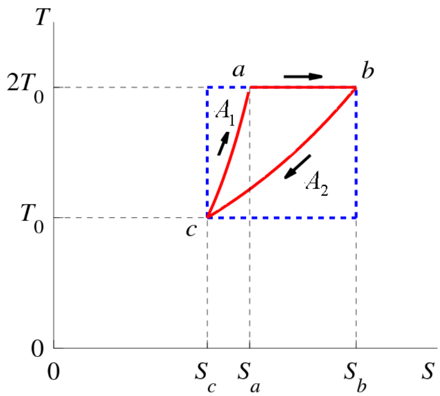


1. ábra. Bal: A 7. feladat körfolyamatai a hagyományos p-V síkon. Jobb: A körfolyamatok az $\ln p$-$\ln V$ síkon.

a) Az izotermák mentén $pV =$ állandó, azaz $\ln p = -\ln V +$ konstans, az $\ln p$-$\ln V$ síkon az izotermák tehát egyenesek. A $pV^\kappa =$ állandó adiabaták szintén egyenesek, csak meredekebb egyenesek, hiszen rájuk $\ln p = -\kappa \ln V +$ konstans érvényes. A Carnot-folyamat határgörbéi (és az izoterm folyamat „átfogója" is) tehát *kiegyenesedik*, parallelogramma folyamatot kapunk (1. ábra jobb panel). Ez mutatja, hogy érdemes lehet ugyanazt a körfolyamatot a megszokott változók helyett más állapotsíkon is ábrázolni.

b) A T-S síkon a Carnot-folyamat még egyszerűbb, hiszen állandó hőmérséklet (T_0 és $2T_0$), illetve állandó entrópia (S_c és $S_b = S_c + C_p \ln 2$) mentén zajlik, a körfolyamat *téglalap* alakúvá vált (2. ábra). A Carnot-folyamatok szempontjából mindig ez az ábrázolás a legcélszerűbb. Rögtön látszik ugyanis, hogy a körfolyamatban felvett és leadott hő különbsége a T_0 magasságú, $C_p \ln 2$ szélességű téglalap területe, azaz $W_{\mathrm{g,C}} = C_p T_0 \ln 2$. Természetesen ez egyben a gáz által végzett munka is. A felvett hő viszont a $2T_0$ magasságú szakasz alatti terület, vagyis $Q_{\mathrm{fel,C}} = 2C_p T_0 \ln 2$. A Carnot-hatásfok ezért $\eta_{\mathrm{C}} = W_{\mathrm{g,C}}/Q_{\mathrm{fel,C}} = T_0 \ln 2/(2T_0 \ln 2) = 1/2$.

Az izoterm háromszög folyamat $2T_0$ hőmérséklethez tartozó a sarkának entrópiája ugyancsak az előző feladat szerint $S_a = S_c + C_V \ln 2$. A csúcspontok koordinátáit tehát ismerjük, az eredeti befogók azonban begörbülnek. Az $S(T,V) - S_c =$



2. ábra. A 7. feladat körfolyamatai a T-S síkon.

$C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}$ entrópiafüggvényből az állandó, V_0 térfogathoz tartozó $T(S)$ görbe $T = T_0 \mathrm{e}^{(S-S_c)/C_V}$ alakú. Állandó nyomáson $V = RT/p_0$ és $V_0 = RT_0/p_0$, azaz $V/V_0 = T/T_0$, s ezzel $S - S_c = (C_V + R)\ln T/T_0 = C_p \ln T/T_0$. Innét az izobár folyamathoz tartozó $T(S)$ görbe $T = T_0 \mathrm{e}^{(S-S_c)/C_p}$ alakú (kevésbe meredek, mint az izochor folyamatban).

Megjegyzés: Az izoterm háromszög folyamat hatásfoka természetesen ebben az ábrázolásban is megkapható. Lassú folyamatokra a hőátadás $\int T\,\mathrm{d}S$, ezért a felvett hő az $S_c \to S_a$ szakaszon

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{fel},1} &= \int_{S_c}^{S_a} T(S)\,\mathrm{d}S = \int_{S_c}^{S_c + C_V \ln 2} T_0 \mathrm{e}^{(S-S_c)/C_V}\,\mathrm{d}S = \\ &= T_0 \mathrm{e}^{-S_c/C_V} C_V [\mathrm{e}^{S/C_V}]_{S_c}^{S_c + C_V \ln 2} = \\ &= T_0 \mathrm{e}^{-S_c/C_V} C_V (\mathrm{e}^{S_c/C_V} \mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^{S_c/C_V}) = \\ &= T_0 C_V (\mathrm{e}^{\ln 2} - 1) = T_0 C_V. \end{aligned}$$

A $2T_0$ hőmérsékletű izoterm folyamat során felvett hő egyszerűen

$$Q_{\mathrm{fel},2} = 2T_0(C_p - C_V)\ln 2 = 2\ln 2 RT_0,$$

s a teljes felvett hő $Q_{\mathrm{fel}} = Q_{\mathrm{fel},1} + Q_{\mathrm{fel},2}$. A $b \to c$ folyamatban leadott hő Q_{le} nagysága hasonlóan

$$Q_{\mathrm{le}} = \int_{S_c}^{S_b} T(S)\,\mathrm{d}S = \int_{S_c}^{S_c + C_p \ln 2} T_0 \mathrm{e}^{(S-S_c)/C_p}\,\mathrm{d}S = T_0 C_p.$$

A hatásfok ezekkel

$$\eta = \frac{W_{\mathrm{g}}(= Q_{\mathrm{fel}} - Q_{\mathrm{le}})}{Q_{\mathrm{fel}}} = \frac{-T_0(C_p - C_V) + 2\ln 2 RT_0}{T_0 C_V + 2\ln 2 RT_0} = \frac{2\ln 2 - 1}{2\ln 2 + C_V/R}.$$

Az a tény, hogy $\eta < \eta_C$ a 3. ábra zárt görbéinek összehasonlításából rögtön következik. A háromszög folyamatban felvett $Q_{\rm fel}$ hő ugyanis kisebb, mint a Carnot-folyamatban, hiszen az $c \to a$ folyamatban a fölső görbe vonal feletti A_1 terület nem ad járulékot. A teljes $W_{\rm g}$ munka azonban nem csak ennyivel, hanem még a $b \to c$ folyamatnak megfelelő görbe alatti, a T_0 egyenes fölé eső A_2 területtel is kisebb, mint a téglalap területe. A $W_{\rm g}/Q_{\rm fel}$ hányados tehát kisebb a Carnot-esethez tartozó $W_{\rm g,C}/Q_{\rm fel,C}$ hányadosnál[1].

9.b) feladat*. Egy mólra $U = C_V T - a/V$, vagyis

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V.$$

Ennek $1/T$-szerese az entrópia hőmérséklet szerinti deriváltja, vagyis

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}.$$

Mivel $p = \frac{RT}{(V-b)} + \frac{a}{V^2}$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T.$$

Az első összefüggésből $S = C_V \ln T +$ egy térfogatfüggő kifejezés. A másodikból $S = R \ln(V-b) +$ egy hőmérsékletfüggő kifejezés. A kettőt összevetve:

$$S(T,V) = C_V \ln T + R \ln(V-b) + \text{konstans}.$$

A kifejezésben az a anyagi paraméter nem jelenik meg, s nagyon hasonló jellegű, mint az egy mól ideális gázra vonatkozó.

11. feladat*. Kiindulva a **9. feladat**

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

összefüggéséből és felhasználva a **6./10. feladatból**, hogy $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = nC_V$, ebben az esetben

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_V}{T}.$$

Mivel az állapotegyenlet $p - p_0 = \frac{\alpha}{\kappa}(T - T_0) - \frac{V - V_0}{\kappa V_0}$,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha}{\kappa}.$$

[1] $\eta = W_{\rm g}/Q_{\rm fel} = (W_{\rm g,C} - A_1 - A_2)/(Q_{\rm fel,C} - A_1)$. Az, hogy ez kisebb, mint $W_{\rm g,C}/Q_{\rm fel,C} < 1$, azonosság.

Innét

$$S(T,V) = nC_V \ln T + \frac{\alpha}{\kappa} V + \text{konstans},$$

mely valamely referencia állapot körül írható úgy is, mint

$$S(T,V) - S_0 = nC_V \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\alpha}{\kappa}(V - V_0).$$

A konstans S entrópiaértékhez tartozó adiabata egyenlete

$$T\mathrm{e}^{(\alpha V)/(n\kappa C_V)} = T_0 \mathrm{e}^{(\alpha V_0)/(n\kappa C_V)} \mathrm{e}^{(S-S_0)/(nC_V)}.$$

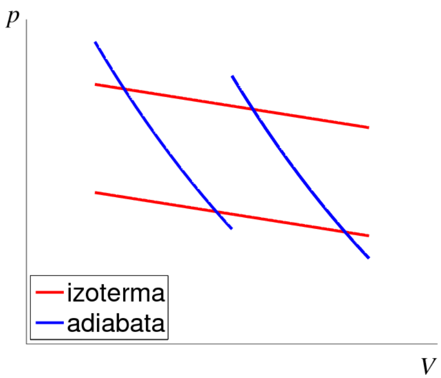
A p-V síkon érvényes alakot úgy kapjuk, hogy T-t kifejezzük az állapotegyenletből:

$$\left(T_0 + \frac{\kappa}{\alpha}(p - p_0) + \frac{V - V_0}{\alpha V_0}\right) e^{\alpha V/(n\kappa C_V)} = B = \text{állandó}.$$

A nyomásra rendezve,

$$p = p_0 - \frac{\alpha}{\kappa} T_0 - \frac{V - V_0}{\kappa V_0} + \frac{\alpha}{\kappa} B e^{-\alpha V/(n\kappa C_V)}.$$

Az adiabata tehát a térfogattól exponenciálisan is függő kifejezés, az izoterma viszont az állapotegyenlet alapján egyenes a p-V síkon (3. ábra).



3. ábra. A 11. feladat Carnot-körfolyamata a p-V síkon.