Megoldott termodinamika feladatok 5.

2. feladat*. A Carnot-körfolyamatban a magasabb, T_2 hőmérséklethez tartozó hőtartállyal kapcsolatban levés során zajló tágulás alatt Q_{fel} hőt vesz fel a rendszer, a T_1 hőmérsékleten zajló összenyomás során Q_{le} nagyságú hőt ad le. A rendszer által végzett mechanikai munka a körfolyamatban $Q_{\mathrm{fel}} - Q_{\mathrm{le}}$, s hatásfok $\eta_C = (Q_{\mathrm{fel}} - Q_{\mathrm{le}})/Q_{\mathrm{fel}}$, s erről tudjuk hogy a hőmérsékletekkel kifejezve $\eta_C = 1 - T_1/T_2$.

A visszafelé hajtott Carnot-gépben (hűtőgépben) a folyamat iránya és az előjelek megváltoznak. A magas hőmérsékletű szakaszon hőt ad le a rendszer, jelöljük ennek nagyságát Q_{lead}-dal, s nyilván $Q_{\mathrm{lead}} = -Q_{\mathrm{fel}}$. A kisebb, T_1 hőmérsékleten hőt von el a rendszer a környezettől, hiszen hűt, aminek nagyságát jelöljük Q_{elvon}-nal, $Q_{\mathrm{elvon}} = -Q_{\mathrm{le}}$. A rendszeren végzett munka ebben a körfolyamatban $W = Q_{\mathrm{lead}} - Q_{\mathrm{elvon}}$.

Ezeket a Carnot-hatásfok hőmenyiségekkel kifejezett alakjába helyettesítve

$$\eta_C = \frac{Q_{\mathrm{lead}} - Q_{\mathrm{elvon}}}{Q_{\mathrm{lead}}} = \frac{W}{Q_{\mathrm{lead}}}.$$

Ebből

$$Q_{\mathrm{lead}} = \frac{1}{1 - \eta_C} Q_{\mathrm{elvon}}.$$

Másrészt

$$Q_{\mathrm{elvon}} = \frac{1 - \eta_C}{\eta_C} W.$$

Megjegyzés: a hűtőgép *jósági tényezőjét* az elvont hő és a rendszeren végzett munka (az elektromos fogyasztás) hányadosaként érdemes definiálni, ami:

$$\text{hűtőgép jósági tényező} = \frac{Q_{\mathrm{elvon}}}{W} = \frac{1 - \eta_C}{\eta_C}.$$

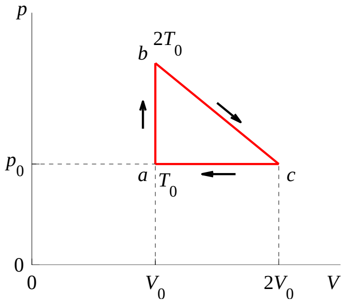
Ez $\eta_C < 1/2$-re (ami a gyakorlatban előforduló adatokkal mindig igaz) nagyobb, mint 1, az elektromos energiánál *több* fordítódik hűtésre.

A $T_2 = 300$ K, $T_1 = 250$ K konkrét adatokkal, $\eta_C = 1/6$, $Q_{\mathrm{lead}} = 6/5\, Q_{\mathrm{elvon}}$, $Q_{\mathrm{elvon}} = 5$ W, vagyis az elvont hő 1,2-szerese adódik át a környezetnek, a befektetett munka ötszöröse(!) a hőelvonás. Ha ez utóbbi 10 J, a befektetett munka csak 2 J.

5. feladat*. A hőpumpa is hűtőgép, csak esetében a lényeges mennyiség nem az elvont hő, hanem a háznak *leadott* hő. Ezért definálják a jósági tényezőjét Q_{lead}/W-ként. A **2. feladat** jelölése alapján ez éppen a Carnot-hatásfok reciproka:

$$\text{hőpumpa jósági tényező} = \frac{Q_{\mathrm{lead}}}{W} = \frac{1}{\eta_C}.$$

Mivel ez az érték 15, a leadott hő a befektetett munka 15-szöröse, vagyis ha az áramot közvetlenül használnánk melegítésre, pl. hősugárzóval, akkor 15-ször annyit kellene fizetnünk az ugyanannyira meleg szobáért.



1. ábra. 7. feladat.

Ha a ház hőmérséklete $T_2 = 300$ K, akkor a hőpumpához használt hideg hőtartály hőmérsékletét T_1-gyel jelölve, $\eta_c = (T_2 - T_1)/T_2$, de a jósági tényező ennek reciproka, ezért írhatjuk, hogy

$$15 = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{300}{300 - T_1},$$

amiből $T_1 = 280$ K, azaz 7 °C. A hőpumpa hideg hőtartályának rendszerint a talajt választják jó néhány méter mélységben, aminek télen is kb. ekkora a hőmérséklete.

7. feladat* Határozzuk meg először a sarokpontok termodinamikai adatait. A legfelső pont nyomása az állapotegyenletből: $p = 2RT_0/(V_0 - b) - a/V_0^2$. Mivel a derékszögű csúcsnál levő pont nyomása $p_0 = RT_0/(V_0 - b) - a/V_0^2$, a nyomáskülönbség, mely majd a munkához lesz szükséges, $p - p_0 = RT_0/(V_0 - b)$. A jobb szélső pont T hőmérséklete ugyancsak az állapotegyenletből következik, hiszen ott a térfogat $2V_0$:

$$RT = (p_0 + \frac{a}{(2V_0)^2})(2V_0 - b) = (\frac{RT_0}{V_0 - b} - \frac{3}{4}\frac{a}{V_0^2})(2V_0 - b) =$$
$$= \frac{RT_0 2V_0}{V_0 - b} - \frac{3}{2}\frac{a}{V_0} - \frac{RT_0 b}{V_0 - b} + \frac{3}{4}\frac{ab}{V_0^2}.$$

A belső energia különbséghez szükségünk lesz a hőmérsékletkülönbségre:

$$T - T_0 = T - T_0\frac{V_0 - b}{V_0 - b} = \frac{T_0 V_0}{V_0 - b} - \frac{3}{2}\frac{a}{RV_0} + \frac{3}{4}\frac{ab}{RV_0^2}.$$

Mivel $a \cdot b$ nagyon kicsi, a továbbiakban az utolsó tagot nem írjuk ki.

A hatásfok $\eta = W/Q_{\text{fel}}$, ehhez csak a körfolyamat során felvett hőt, ill. az ezalatt végzett munkát kell meghatározni. Utóbbi egyszerűen a háromszög területe: $W = V_0(p - p_0)/2 = RT_0V_0/(2(V_0 - b))$. Hőfelvételt az $a \to b$ és $b \to c$ szakaszokon várunk.

Az $a \to b$ szakaszon a térfogat nem változik, a gáz nem végez munkát, ezért a felvett hő a belső energia megváltozásából adódik. Egy mól van der Waals-gáz termikus állapotegyenlete $U = C_V T - a/V$, de mivel a térfogat állandó, $Q_1 = C_V(2T_0 - T_0) = C_V T_0$,

A $b \to c$ szakaszon a gáz végez munkát, ami a háromszög és az alatta levő téglalap (vagy a megfelelő trapéz) területe:

$$W_{\text{gáz}} = V_0 \frac{p - p_0}{2} + V_0 p_0 = \frac{V_0 R T_0}{2(V_0 - b)} + \frac{V_0 R T_0}{(V_0 - b)} - \frac{a}{V_0} = \frac{3 V_0 R T_0}{2(V_0 - b)} - \frac{a}{V_0}.$$

A belső energia változása $\Delta U = C_V(T - 2T_0) - a/(2V_0) + a/V_0 = C_V(T - 2T_0) + a/(2V_0)$. Az ezen a szakaszon felvett hő $Q_2 = \Delta U + W_{\text{gáz}}$.

A teljes felvett hő tehát

$$Q_{\text{fel}} = Q_1 + Q_2 = C_V(T - T_0) + \frac{a}{2V_0} + \frac{3V_0 R T_0}{2(V_0 - b)} - \frac{a}{V_0}.$$

A $T - T_0$ mennyiséget behelyettesítve

$$Q_{\text{fel}} = C_V \left(\frac{T_0 V_0}{V_0 - b} - \frac{3}{2} \frac{a}{R V_0} \right) - \frac{a}{2V_0} + \frac{3V_0 R T_0}{2(V_0 - b)} = (C_V + \frac{3R}{2}) \frac{V_0 T_0}{V_0 - b} - (3C_v + R) \frac{a}{2RV_0}.$$

A hatásfok felírásakor kihasználjuk, hogy $C_V = 3R/2$, ezzel

$$\eta = \frac{W_{\text{gáz}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{\frac{V_0 R T_0}{2(V_0 - b)}}{\frac{3 V_0 R T_0}{V_0 - b} - \frac{11}{4} \frac{a}{V_0}} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{V_0 - b}{3 V_0 R T_0} \frac{11a}{4V_0}}.$$

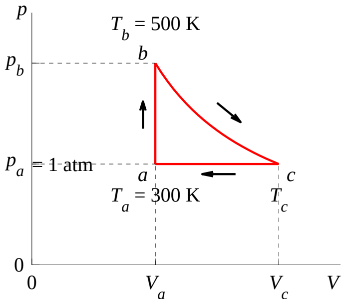
Ha ismét felhasználjuk, hogy a és b kicsi, szorzatuk elhanyagolható, ill. alkalmazzuk, az $1/(1 + x) \approx 1 - x$ közelítést, akkor

$$\eta = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{11a}{12 V_0 R T_0} \right).$$

Az ideális gázzal végzett körfolyamat hatásfoka $1/6$, a van der Waals-gázé tehát valamivel nagyobb, és a korrekció függ az a anyagi paramétertől és a V_0, T_0 adatoktól is.

9. feladat*. Először határozzuk meg a háromszög b pontjának nyomását, ahol a hőmérséklet T_b. Mivel a térfogat ugyanaz, mint az a pontban, ahol a nyomás $p_a = 1$ atm, és izochor esetben $p/T =$ állandó, írhatjuk, hogy $p_b/T_b = p_a/T_a$, amiből $p_a = T_b/T_a \cdot p_a = 5/3 p_0 = 1,67$ atm. A c pontnak sem a térfogata, sem a hőmérséklete nem ismert, csak nyomása, ami p_a. Izobár állapotok között $V/T =$ állandó, ezért igaz, hogy $V_c = T_c/T_a \cdot V_a$. Az adiabata egyenlete a nyomással és a hőmérséklettel kifejezve $p^{(1-\kappa)/\kappa} T =$ állandó. A p_b és p_a nyomások között felírva, $T_c = T_b (p_b/p_a)^{(1-\kappa)/\kappa} = T_b (T_b/T_a)^{(1-\kappa)/\kappa} = T_a (T_b/T_a)^{1/\kappa}$.

Az $a \to b$ szakaszon a gáz nem végez munkát, a hőfelvétel a belső energia megváltozásából adódik. n mólra $\Delta U = n C_v (T_b - T_a) = Q_1$. Másutt nem is történik



2. ábra. 9. feladat.

hőfelvétel, $Q_{\mathrm{fel}} = Q_1$, mégis érdemes minden egyes szakaszra megadni a hőcserét, mert ezek előjeles összege a gáz által végzett teljes munka.

A $b \to c$ szakasz az adiabatikus, hőcsere nincs, $Q_2 = 0$.

A $c \to a$ szakasz izobár, azon tudjuk, hogy (kivételesen) létezik mólhő, ami éppen C_p. Az átadott előjeles hőmennyiség $Q_3 = nC_p(T_a - T_c)$.

A körfolyamat során a teljes hőátadás $Q_1 + Q_2 + Q_3$, ami egyben a gáz teljes munkája, azaz $W_{\text{gáz}} = nC_V(T_b - T_a) + nC_p(T_a - T_c)$.

A hatásfok

$$\eta = \frac{W_{\text{gáz}}}{Q_{\mathrm{fel}}} = \frac{nC_V(T_b - T_a) + nC_p(T_a - T_c)}{nC_V(T_b - T_a)} = 1 - \frac{C_p}{C_V}\frac{T_c - T_a}{T_b - T_a} = 1 - \kappa\frac{T_c - T_a}{T_b - T_a}.$$

A kifejezés azt is illusztrálja, hogy a hatásfok általában független az anyagmennyiségtől (az n mólszám kiesett). A c pont hőmérsékletét a két adott hőmérséklettel kifejezve

$$\eta = 1 - \kappa\frac{\left((T_b/T_a)^{1/\kappa} - 1\right)}{T_b/T_a - 1}.$$

Mivel $C_V = 3R/2$, $\kappa = 5/3$, az adatok szerint T_b/T_a szintén $5/3$, ezzel

$$\eta = 1 - \frac{5}{3}\frac{((5/3)^{3/5} - 1)}{2/3} = 1 - \frac{5}{2}((5/3)^{3/5} - 1) = 0,1.$$

A T_b és T_a hőmérsékletek között zajló Carnot-folyamat hatásfoka $\eta_C = 1 - T_a/T_b = 1 - 3/5 = 0,4$. Ez illusztrálja az általános törvényt, miszerint minden körfolyamat hatásfoka kisebb, mint a folyamat maximális és minimális hőmérsékletei között zajló Carnot-folyamaté.