Megoldott termodinamika feladatok 1.

7. feladat*. A Θ tehetetlenségi nyomatékú fizikai inga kis kitérésű lengésideje $T = 2\pi\sqrt{\Theta/(mgs)}$, ahol s a súlypont távolsága a forgástengelytől. Az l hosszúságú vékony rúd végpontjára $\Theta = ml^2/3$, $s = l/2$, azaz $T = 2\pi\sqrt{2/3 \cdot l/g}$. A hőtágulás miatt $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, ezért

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l_0}{3g}(1 + \alpha\Delta t)} = T_0\sqrt{(1 + \alpha\Delta t)},$$

ahol T_0 az eredeti hőmérséklethez tartozó lengésidő. Mivel $\alpha\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ sokkal kisebb, mint 1, jó közelítéssel használhatjuk a $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ összefüggést (a $\sqrt{1+x}$ függvény nulla körüli Taylor-sorának első két tagját), s így

$$T \approx T_0(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}).$$

A lengésidő tehát $\alpha\Delta t/2 = 10^{-6}$ szorosával, vagyis 10^{-4} %-kal nő. Ha $T_0 = 1$ s, akkor egy nap, azaz 86400 s alatt $86400 \cdot 10^{-6} = 0,08$ másodperccel nagyobb a teljes idő, vagyis az óra kb. $0,1$ másodpercet késik. Közönséges fémek hőtágulási együtthatója kb. 10-szer akkora mint az „invar”-é, az ezekből készült ingaórak kb. 1 másodpercet késnek.

9. feladat*. Kezdetben a csőben levő levegő (mely jó közelítéssel ideális gáznak tekinthető) hossza $L_0 - L$, nyomása a p_0 légköri nyomás. Ezután felülről lezárjuk, majd kiemeljük a csövet, s megvárjuk, hogy környezetével egyensúlyba kerüljön. A cső alján ekkor valamilyen x hosszban marad folyadék, a fölötte levő levegőoszlop hossza $L_0 - x$, nyomása a még ismeretlen p. A légoszlop tömege nem változott, a kezdő és végállapotban hőmérséklete azonos, ezért a $pV =$ konstans Boyle–Mariott-törvény alkalmazható:

$$p_0(L_0 - L)A = p(L_0 - x)A,$$

amiből

$$p = \frac{L_0 - L}{L_0 - x}p_0.$$

Az x hossz és a p nyomás között tehát egyértelmű kapcsolat áll fenn. Az x mennyiséget a *mechanikai egyensúly*, a nyugalom feltételéből kaphatjuk meg. A folyadékszakaszra alulról felfelé ható p_0A és a felülről lefelé ható pA erő eredője a ρxAg súlyt kompenzálja:

$$(p_0 - p)A = \rho gAx.$$

A p kifejezését behelyettesítve és A-val egyszerűsítve

$$p_0 - \frac{L_0 - L}{L_0 - x}p_0 = \rho gx.$$

Ez a

$$\rho g x^2 - x(p_0 + \rho g L_0) + p_0 L = 0$$

másodfokú egyenletre vezet. Ennek megoldása

$$x = \frac{p_0}{2\rho g} + \frac{L_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{2\rho g} + \frac{L_0}{2}\right)^2 - \frac{p_0}{\rho g} L}.$$

Mivel az x hosszat $L_0/2$-nél kisebbnek várjuk, ha $L = L_0/2$, csak a negativ gyököt tartottuk meg. Vegyük észre, hogy a kifejezésben megjelent a $h = p_0/\rho g$ hossz. Ez nem más, mint az a folyadékmagasság, mellyel a $\rho g h$ hidrosztatikai nyomás éppen a légköri nyomás. Amennyiben a folyadék higany, h a légköri nyomás Hgmm-ben kifejezve. (Vízre $h \approx 10$ m.)

Azt, hogy melyik gyöknek van fizikai jelentése, az adatok döntik el. Ha pl. $L = L_0/2$, mivel az x hosszat $L_0/2$-nél kisebbnek várjuk, ennek csak a negativ gyök felel meg.

10. feladat*. a) Az eredetileg V_0 térfogatú higany hőtágulás miatti $\Delta V = V_0 \alpha_{Hg} \Delta t$ térfogatváltozása a d_0 átmérőjű kapillárisban Δh szintváltozást okoz. Mivel ennek $d_0^2\pi/4 \cdot \Delta h$ térfogata megegyezik ΔV-vel,

$$\Delta h = \frac{4V_0}{d_0^2 \pi} \alpha_{Hg} \Delta t = 13,9 \text{ cm}.$$

b) Az üvegre rajzolt vonal alatti térfogat az üveg belsejében megegyezik a higany teljes V_0 térfogatával. Felhaszálva, hogy egy anyagban levő üreg, ugyanúgy tágul, mint anyaggal töltött állapotban, az üveg tágulása miatt ez az üreg $V = V_0(1+\alpha_{\text{ü}}\Delta t)$ térfogatúra nő. Ez független a hőmérő tartályának konkrét alakjától. A higany ezen kívül még betölti a $d = d_0(1 + \alpha_{\text{ü}}/3\Delta t)$ átmérőjűre vastagodott kapilláris adott $\Delta h' = 11,9$ cm magasságú hosszát is. d felírásakor felhasználtuk, hogy a lineáris hőtágulási együttható a térfogati harmada. Ez a térfogat a kitágult $V_0(1 + \alpha_{Hg}\Delta t)$ higanytérfogattal egyenlő, azaz

$$V_0(1 + \alpha_{\text{ü}}\Delta t) + [d_0(1 + \alpha_{\text{ü}}/3\Delta t)]^2 \pi \Delta h'/4 = V_0(1 + \alpha_{Hg}\Delta t) = V_0 + d_0^2/4\pi\Delta h,$$

ahol az utolsó egyenlőségben az a) kérdésben kapott Δh jelent meg. Mivel $\alpha_{\text{ü}}\Delta t$ nagyon kicsi, használhatjuk az $(1 + x)^2 \approx 1 + 2x$ közelítést, s ezzel

$$V_0\alpha_{\text{ü}}\Delta t + d_0^2(1 + 2\alpha_{\text{ü}}/3\Delta t)\pi\Delta h'/4 = V_0\alpha_{Hg}\Delta t = d_0^2/4\pi\Delta h.$$

Ez lineáris egyenlet az üveg hőtágulási együtthatójára:

$$\alpha_{\text{ü}}(V_0 + \frac{2}{3}\frac{d_0^2\pi}{4}\Delta h')\Delta t = V_0\alpha_{Hg}\Delta t - \frac{d_0^2\pi}{4}\Delta h' = \frac{d_0^2\pi}{4}(\Delta h - \Delta h') = V_0\alpha_{Hg}\Delta t\left(1 - \frac{\Delta h'}{\Delta h}\right),$$

amiből

$$\alpha = \alpha_{Hg}\frac{1 - \Delta h'/\Delta h}{1 + \frac{1}{6}\frac{d_0^2\pi}{V_0}\Delta h'} = 4 \cdot 10^{-5} 1/{}^\circ\text{C}.$$