Gyakorló feladatok IX.

1. Határozzuk meg a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét úgy, hogy a $\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alakban keressük, és felírjuk a $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ összefüggésből adódó 4 egyenletet az a, ..., d mennyiségekre. (Ez a módszer minden $n \times n$-es mátrix inverzére alkalmazható, de n^2 számú egyenlet megoldását igényli.)

2. Mutassuk meg, hogy az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ mátrixhoz található olyan $\hat{B}$ kétszer-kettes mátrix, hogy $\hat{A}\hat{B} = \hat{0}$, a nulla mátrix.

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét, amennyiben az létezik:

   $$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

   $$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

   $$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   $$\hat{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

   $$\hat{A}_5 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Kétszer-kettes mátrixokkal mutassuk meg, hogy az $\hat{A}\hat{B}$ szorzat determinánsa az egyes determinánsok szorzata, azaz det$\hat{A}\hat{B}$=det$\hat{A}$ det$\hat{B}$.

   b) Hogyan fejezhető ki tetszőleges $\hat{A}$ és $\hat{B}$ mátrixok $\hat{A}\hat{B}$ szorzatának inverze az egyes inverz mátrixokkal?

   c) Az ún. ortogonális $\hat{O}$ mátrixokra igaz, hogy $\hat{O}\hat{\tilde{O}} = \hat{E}$. Mit mondhatunk az $\hat{O}$ mátrixok determinánsáról?

   d) Hogyan viszonyul egymáshoz egy mátrix és adjungáltjának determinánsa?

5. Oldjuk meg mátrix invertálással az $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ típusú

   $x + 2y = 3,$

   $4x + 5y = 6$

   lineáris egyenletrendszert.

6. Oldjuk meg az

   $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,$

   $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4,$

   $4x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$

   egyenletrendszert mátrix invertálással.

7. Oldjuk meg az

   $x_1 + x_2 + x_3 = 2q,$

   $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4q,$

   $3x_1 - 2x_2 + x_3 = q$

   egyenletrendszert mátrix invertálással (q tetszőleges paraméter).

8. Oldjuk meg az

   $x_1 + x_2 + x_3 = 2,$

   $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4,$

   $3x_1 - 2x_2 + px_3 = 1$

   egyenletrendszert mátrix invertálással (p tetszőleges paraméter). Mi tünteti ki a $p = 3$ értéket? Érdemes a feladatot összevetni az V.5 feladattal.

9. Az $\hat{A}$ és $\hat{B}$ nemnulla mátrixokra fennáll, hogy szorzatuk a nulla mátrix. $\hat{A}$ tetszőleges, milyen feltételnek kell teljesülnie a $\hat{B}$ mátrixra nézve? Konkrét példaként l. 2. feladat.

10. Határozzuk meg az $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet $\mathbf{x}$ megoldását, ha $\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ és

    a) az a paraméter különbözik 1-től és -2-től,

    b) $a = 1$,

    c) $a = -2$ (a két utóbbi esetben nem csak egy megoldás létezik!).

11. A kifejtési tétel alapján mutassuk meg, hogy amennyiben az $\hat{A}$ mátrix determinánsa nulla, akkor $\hat{A}\hat{\tilde{A}} = \hat{0}$. Mi a feltétele ennek alapján az $\hat{A}$ mátrixra nézve annak, hogy az $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ún. *homogén* lineáris egyenletnek lehessen nemtriviális (azaz az azonosan $\mathbf{0}$ vektortól különböző) megoldása?

12. Mutassuk meg, hogy az inverz mátrix determinánsa a mátrix determinánsának reciproka: $\det\hat{A}^{-1} = 1/\det\hat{A}$.