Gyakorló feladatok VII.

1. Határozzuk meg a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix $\tilde{\hat{A}}$ transzponáltját.

2. Antiszimmetrikus a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix?

3. Írjuk fel a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

4. Szorozzuk össze a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot és a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ vektort.

5. Adottak a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok. Határozzuk meg az $\hat{A}\hat{B}$ és a $\hat{B}\hat{A}$ szorzatot.

6. Adott a $\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. Tetszőleges háromszor hármas $\hat{A}$ mátrix esetén mit eredményez $\hat{A}\hat{P}$, ill. $\hat{P}\hat{A}$?

7. Határozzuk meg a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ mátrixok szorzatát.

8. Határozzuk meg
   a) a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$
   b) a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -6 & 6 & -6 \\ -8 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   mátrixok $[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ kommutátorait.

9. Adottak a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 6 & 3 & -9 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix}$, $\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ és a $\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -10 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok. Mennyi az $\hat{A}\hat{B}$, az $\hat{A}\hat{C}$ és a $\hat{B}\hat{C}$ szorzat?

10. Határozzuk meg a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 20 \\ 30 & 19 & 50 \\ -18 & -12 & -31 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetét.

11. a) Mutassuk meg, hogy a vektorok skaláris szorzata felfogható mint egy $1 \times n$-es és egy $n \times 1$-es mátrix szorzata.

    b) Írjuk fel az $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$, $-5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3$, $2x_1 + x_3 - x_4 = 2$, $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -4$ egyenletrendszert $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakban. Adjuk meg a $\hat{A}$ mátrixot és a $\mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

12. Mit eredményez a $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix második, harmadik, ill. negyedik hatványa?