Gyakorló feladatok VI.

1. Határozzuk meg az $(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2 = R^2$ ($\mathbf{c}$ konstans vektor) egyenletű kör (gömb) adott $P_0(\mathbf{r}_0)$ pontjához húzott érintője (érintősíkja) egyenletét.

2. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}^2 + \mathbf{m}\mathbf{r} = c$ egyenlet, ahol $\mathbf{m}$ állandó vektor, c pedig pozitív szám, kört (gömböt) ír le.

3. Mekkora az $A(-2, 6, -3)$ pont és az $x^2+y^2+z^2 = 4$ gömb távolsága? Döntsük el, hogy az A pont a gömb belsejébe esik-e.

4. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú P_1 pontnak a P_0 ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú ($\mathbf{v}$ nem egységvektor) egyenestől mért távolsága
$$d = \frac{\mid (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} \mid}{v}.$$

5. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú P_1 pont és a P_0 ponton átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú ($\mathbf{n}$ nem egységvektor) sík távolsága
$$d = \frac{\mid (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} \mid}{n}.$$

6. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}\mathbf{r} = b$ egyenlettel definiált pontok mértani helye az origótól b/a távolságban levő $\mathbf{a}$ normálvektorú sík (l. II. példasor 4. feladata).

7. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú P_1 ponton és az $\mathbf{r}_2$ helyvektorú P_2 ponton átmenő $\mathbf{v}_1$, ill. $\mathbf{v}_2$ irányvektorú kitérő egyenesek távolsága
$$d = \frac{\mid (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \mid}{\mid \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \mid}.$$

8. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú P_1 ponton és az $\mathbf{r}_2$ helyvektorú P_2 ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú párhuzamos egyenesek távolsága
$$d = \frac{\mid (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{v} \mid}{v}.$$

9. Lássuk be, hogy az $\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{b}$ egyenlettel definiált pontok mértani helye az origón átmenő, $\mathbf{a}$ irányvektorú egyenessel párhuzamos egyenes, tőle b/a távolságban, a $\mathbf{b}$ normálvektorú síkban (l. III. példasor 8. feladat).

10. Mekkora az $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ gömb és a $3x - 4y + 19 = 0$ sík távosága?

11. Mutassuk meg, hogy annak feltétele, hogy az $\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$ egyenes (sík) érintse az $(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2 = R^2$ kört (gömböt) az, hogy $Rn = \mid \mathbf{n}(\mathbf{c}-\mathbf{r}_0) \mid$. Ellenőrizzük, hogy ez teljesül az 1. feladatban meghatározott érintőre.