

Gyakorló feladatok IV.

1. Számítsuk ki az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vegyes szorzat értékét, ha $\mathbf{a} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$, ill. $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -5)$, $\mathbf{c} = (5, 7, 2)$.
2. Számítsuk ki a paralelepipedon térfogatát, ha az OA, OB, OC egy csúcsból induló élei rendre a $(2, -1, 3)$, $(0, -2, -1)$, $(3, 2, 1)$ vektorok.
3. Az előadáson megismert Sarrus-szabály szellemében számítsuk ki az alábbi determináns értékét: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.
4. Mutassuk meg, hogy az \mathbf{a} és \mathbf{b} kétdimenziós vektorokból képzett $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ determináns akkor zérus, ha a vektorok párhuzamosak.
5. Oldjuk meg az $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ egyenletrendszer általánosan, a paramétereket végig betűkkel jelölve. Vegyük észre, hogy a végeredmény x -re és y -ra is két-két determináns hányadosa. Hogyan fogalmazható meg szóban a szabály? Oldjuk meg ezek után determinánsok segítségével az $x + 2y = 3$, $4x + 5y = 6$ lineáris egyenletrendszert.
6. Mi az $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ egyenletrendszer megoldása, ha $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ és minden paraméter különbözik nullától?
7. Mi a feltétele annak, hogy az $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek nullától és végtelentől különböző megoldásai legyenek. Mit jelent ez az $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ determinánusra nézve?
8. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. Számítsuk ki ugyanezt a mennyiséget hármasszorzatként is.
9. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.
10. Hogyan változik meg egy háromszor-hármasszorzat determináns értéke, ha két oszlopát felcseréljük? Magyarázható ez a hármasszorzat tulajdonságaival?
11. Hogyan változik meg egy háromszor-hármasszorzat determináns értéke, ha két sorát felcseréljük?
12. Hogyan változik meg a determináns értéke, ha a determinánst nem úgy képezzük, hogy az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorokat oszlopokba, hanem úgy, hogy sorokba rendezzük?