Gyakorló feladatok II.

1. Bontsuk fel egy háromszög egyik szögfelező vektorát a kezdőpontjából kiinduló oldalvektorokkal párhuzamos összetevőkre. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c. Határozzuk meg a párhuzamos összetevők együtthatóit is. (Használjuk fel, hogy a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.)

2. Mutassuk meg, hogy ha az egy pontból kiinduló $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek, és $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nem egyállásúak, akkor $\mathbf{c}$ előáll, mint $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, ahol $\alpha + \beta = 1$.

3. Mutassuk meg, hogy ha az egy pontból kiinduló $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok olyanok, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nem egyállásúak, és $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, ahol $\alpha + \beta = 1$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek.

4. Adott az O-ból induló $\mathbf{a}$ vektor. Keressük azon X pontok mértani helyét a térben, amelyekre igaz, hogy az O-ból az X-hez húzott $\mathbf{r}$ vektorra fennáll az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 3$ feltétel.

5. Legyen $\mathbf{a}_m$ az $\mathbf{a}$-nak egy az $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges síkon levő merőleges vetület vektora. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_m$-et az $\mathbf{e}$ körül megfelelő irányban 90 fokkal elforgatva az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektort kapjuk.

6. Rajzzal szemléltessük, hogy $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a}_m$, ahol $\mathbf{a}_m$ az $\mathbf{a}$-nak az $\mathbf{e}$-re merőleges síkon levő merőleges vetülete.

7. Rajzzal szemléltessük, hogy $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$, ahol $\mathbf{a}_m$ az $\mathbf{a}$-nak az $\mathbf{e}$-re merőleges síkon levő merőleges vetülete.

8. Rajzzal szemléltessük, hogy $\mathbf{a}$-nak az $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges összetevője $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$.

9. Geometriai megfontolásokkal mutassuk meg, hogy $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ill. $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

10. Legyen $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.