Gyakorló feladatok XII.

1. Határozzuk meg a z tengely körüli α szögű forgatást leíró $\hat{O}_\alpha$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Mi a valós és az imaginárius sajátértékek jelentése? Mutassuk meg, hogy a $\hat{O}_\alpha$ mátrix ortogonális, vagyis inverze egyenlő a transzponáltjával $\hat{O}_\alpha^{-1} = \tilde{\hat{O}}_\alpha$. Lássuk be, hogy az ilyen tulajdonságú mátrix determinánsának abszolútértéke mindig 1.

2. Mutassuk meg, hogy ha egy koordinátarendszerben egy tenzor a $\hat{A}$ 2×2-es mátrixszal írható le, akkor az α szöggel elforgatott koordinátarendszerben a $\hat{O}_{-\alpha}\hat{A}\hat{O}_\alpha$ mátrixszal. Útmutatás: Az eredeti rendszerben az új rendszerbeli $\mathbf{r}'$ vektor írható mint $\mathbf{r}' = \hat{O}_{-\alpha}\mathbf{r}$.

3. Mutassuk meg, hogy az a mátrix, amely az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot diagonalizálja, vagyis a $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonális mátrixba forgatja, éppen az $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ *normált* sajátvektorokból képzett $\hat{O} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ mátrix. Igaz tehát, hogy $\hat{\Lambda} = \tilde{\hat{O}}\hat{A}\hat{O}$.

4. Mutassuk meg, hogy az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix előáll a normált $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_1$ sajátvektoraiból képzett diadikus szorzatok $\hat{A} = \lambda_1 \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{s}_2$ összegeként. A sajátértékek és sajátvektorok előállítják tehát magát a mátrixot!

5. Határozzuk meg az $4x^2 + 6xy + 4y^2 = 1$ egyenletű ellipszis nagy és kistengelyét. Útmutatás: keressük meg azt a koordinátarendszert, melyben az ellipszis normálalakban jelenik meg, vagyis, melyben az ellipszist definiáló mátrix diagonális. A koordinátarendszer hány fokos elforgatása szükséges ehhez?