Gyakorló feladatok X.

1. Az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix a sík vektorait elforgatja és megnyújtja. Mutassuk meg, hogy létezik két olyan irány, amelyekkel párhuzamos vektorokat $\hat{A}$ *nem* forgatja el, csak nyújtja, s ezekben a nyújtási tényező $\lambda_1 = 4$ és $\lambda_2 = -2$. Mik ezek az irányok? Útmutatás: a keresett irányokba mutató vektorokat keressük az $\mathbf{u}_i = (x_i, 1)$ alakban, $i = 1, 2$. Következmény: A sík tetszőleges vektora írható, mint $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$, s ezeket $\hat{A}$ az $\mathbf{r}' = \hat{A}\mathbf{r} = 4\alpha\mathbf{u}_1 - 2\beta\mathbf{u}_2$ vektorba viszi át, vagyis általában forgat is.

2. Mutassuk meg, hogy az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix a $-1/2$ iránytangensű egyenes mentén fekvő vektorokat egyáltalán nem változtatja, a pozitív szögfelező mentén fekvők hosszát pedig $\lambda_1 = 4$-szeresére növeli. Mibe képezi $\hat{A}$, $\hat{A}^2$,... $\hat{A}^5$ az $\mathbf{r}_0 = (2, 1)$ vektort? Milyen irányhoz tartanak az így kapott $\mathbf{r}_1$,..., $\mathbf{r}_5$ vektorok és mihez tart az $\mid \mathbf{r}_n \mid / \mid \mathbf{r}_{n-1} \mid$ arány, $n = 2, ..., 5$?

3. Tegyük fel, hogy az $\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix az $\mathbf{u} = (x, 1)$ vektort (x ismeretlen) nem forgatja el, csak megnyújtja a λ tényezővel. Vezessük le a λ-t meghatározó egyenletet. Vegyük észre, hogy abban az $\hat{A}$ mátrix determinánsa és diagonális elemeinek összege szerepel csak.

4. Számítsuk ki az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix λ_1, λ_2 sajátértékeit és $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ sajátvektorait. Hogyan függnek ezek az a paramétertől? Ellenőrizzük, hogy a sajátértéket meghatározó egyenletre érvényes az előző feladat állítása. Mely a érték mellett lesznek a sajátvektorok egymásra merőlegesek? Útmutatás: keressük az $\mathbf{s}_i$, $i = 1, 2$ sajátvektorokat az (x_i, y_i) alakban, tudván, hogy egyikük szabad paraméter, melyet az egységvektorra normálás rögzít le, ha szükséges.

5. Számítsuk ki az $\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ és az $\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$ mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait.

6. Mutassuk meg, hogy létezik 3 olyan irány a térben, amellyel párhuzamos vektorokat az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix nem forgatja el, s a megfelelő nyújtási tényezők $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$. Útmutatás: a keresett irányokba mutató vektorokat keressük az $\mathbf{u}_i = (x_i, y_i, 1)$ alakban, $i = 1, 2, 3$.

7. Számítsuk ki az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait. Határozzuk meg a mátrix és adjungáltja spurját, és el-

lenőrizzük a spur$\hat{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, spur$\hat{\hat{A}} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$, det$\hat{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ összefüggéseket.

8. Számítsuk ki az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Mutassuk meg, hogy a sajátvektorok derékszögű koordinátarendszert definiálnak. Ez minden szimmetrikus mátrixra igaz, ha sajátértékei különbözőek.

9. Számítsuk ki az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és a $\hat{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait. Mi a közös ezekben az esetekben?

10. A 2. feladat alapján határozzuk meg, hányszorosa az $\hat{A}^{n+1}\mathbf{r}$ vektor hossza az $\hat{A}^n\mathbf{r}$ hosszának (tetszőleges $\mathbf{r}$ vektor esetén!), ha $n \gg 1$ és $\hat{A}$ olyan mátrix, melynek legnagyobb sajátértéke λ_1 (> 1) valós.

11. Határozzuk meg az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ általános antiszimmetrikus mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Mi érdekeset tapasztalunk?

12. Az $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix nem szimmetrikus, ezért $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ sajátvektorai nem merőlegesek egymásra (ferdeszögű koordinátarendszert alkotnak). Mutassuk meg, hogy az $\hat{\hat{A}}$ transzponált mátrix sajátértékei ugyanazok, de $\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', \mathbf{s}_3'$ sajátvektorai mások mint az $\hat{A}$ mátrixéi, közülük azonban mindegyik merőleges valamelyik $\mathbf{s}_i$-re. (Szimmetrikus esetben a transzponált és az eredeti mátrix sajátvektorai azonosak.)