Gyakorló feladatok I.

1. Mutassuk meg, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összegük és különbségük egyenlő hosszú.

2. Mutassuk meg, hogy ha két vektor összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra.

3. Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az $\mathbf{a}$, a B csúcsába a $\mathbf{b}$, a BC felezőpontjához pedig a $\mathbf{p}$ vektor vezet. Állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ segítségével az O-ból a C-hez vezető vektort, és az AC vektort.

4. Egy kocka csúcsaiból induló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével (összegként, ill. különbségként) az összes lapátlóvektort és a testátlóvektorokat.

5. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges pontból egy sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

6. Milyen esetben teljesül, hogy $\mid \mathbf{a} + \mathbf{b} \mid = \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \mid$?

7. Nevezzük valamely vektor egy egyenesen levő merőleges vetületének azt a vektort, amelyiknek kezdőpontja, ill. végpontja az eredeti vektor kezdő-, ill. végpontjának vetülete. Legyen az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos egyenesen levő vetülete $\mathbf{a}'$, és legyen $\mathbf{e}$ egységvektor (azaz $|\mathbf{e}| \equiv e = 1$). Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a}' = (\mathbf{ae})\mathbf{e}$, ahol $(\mathbf{ab})$ az egymással α szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok középiskolában tanult skalárszorzatát jelöli: $(\mathbf{ab}) = ab\cos\alpha$.

8. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{v} = (\mathbf{ab})\mathbf{c}/2 - (\mathbf{ac})\mathbf{b}/2$ vektor merőleges $\mathbf{a}$-ra. Útmutatás: a $\mathbf{v}$ vektort meg szabad szorozni bármilyen másik vektorral. Mivel szorozzuk, ha az $\mathbf{a}$-ra való merőlegességét kívánjuk megmutatni?

9. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szögét, ha $\mathbf{a}/2 + \mathbf{b}$ és $5\mathbf{a}/2 - 2\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra. Útmutatás: érdemes a két vektort algebrailag összeszorozni. Mivel egyenlő a szorzat, ha merőlegesek? Használjuk ki, hogy $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$, mert egységvektorok, s ezzel egyenletet kapunk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögére.

10. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét és hosszukat is, ha $3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ és $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, valamint $\mathbf{a}/2 + 2\mathbf{b}$ és $-\mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2$ merőlegesek egymásra. Útmutatás: a szorzás elvégzése és ab-vel való osztás után vegyük észre, hogy két egyenletet kapunk, melyekben a szög és a két hossz aránya (pl. a/b) az két ismeretlen.

Gyakorló feladatok I.

1. Mutassuk meg, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összegük és különbségük egyenlő hosszú.

2. Mutassuk meg, hogy ha két vektor összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra.

3. Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az $\mathbf{a}$, a B csúcsába a $\mathbf{b}$, a BC felezőpontjához pedig a $\mathbf{p}$ vektor vezet. Állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ segítségével az O-ból a C-hez vezető vektort, és az AC vektort.

4. Egy kocka csúcsaiból induló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével (összegként, ill. különbségként) az összes lapátlóvektort és a testátlóvektorokat.

5. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges pontból egy sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

6. Milyen esetben teljesül, hogy $\mid \mathbf{a}+\mathbf{b} \mid = \mid \mathbf{a}-\mathbf{b} \mid$?

7. Nevezzük valamely vektor egy egyenesen levő merőleges vetületének azt a vektort, amelyiknek kezdőpontja, ill. végpontja az eredeti vektor kezdő-, ill. végpontjának vetülete. Legyen az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos egyenesen levő vetülete $\mathbf{a}'$, és legyen $\mathbf{e}$ egységvektor (azaz $|\mathbf{e}| \equiv e = 1$). Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a}' = (\mathbf{ae})\mathbf{e}$, ahol $(\mathbf{ab})$ az egymással α szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok középiskolában tanult skalárszorzatát jelöli: $(\mathbf{ab}) = ab\cos\alpha$.

8. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{v} = (\mathbf{ab})\mathbf{c}/2 - (\mathbf{ac})\mathbf{b}/2$ vektor merőleges $\mathbf{a}$-ra. Útmutatás: a $\mathbf{v}$ vektort meg szabad szorozni bármilyen másik vektorral. Mivel szorozzuk, ha az $\mathbf{a}$-ra való merőlegességét kívánjuk megmutatni?

9. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szögét, ha $\mathbf{a}/2 + \mathbf{b}$ és $5\mathbf{a}/2 - 2\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra. Útmutatás: érdemes a két vektort algebrailag összesszorozni. Mivel egyenlő a szorzat, ha merőlegesek? Használjuk ki, hogy $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$, mert egységvektorok, s ezzel egyenletet kapunk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögére.

10. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét és hosszukat is, ha $3\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ és $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, valamint $\mathbf{a}/2+2\mathbf{b}$ és $-\mathbf{a}/2+\mathbf{b}/2$ merőlegesek egymásra. Útmutatás: a szorzás elvégzése és ab-vel való osztás után vegyük észre, hogy két egyenletet kapunk, melyekben a szög és a két hossz aránya (pl. a/b) az két ismeretlen.