Matematikai módszerek a fizikában I.
Összefoglaló a 2. zh-hoz

- ***Mátrixok***
  - **műveletek**:
    - $C = A + B$ $(A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{m\times n})$
      $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$
    - $C = \lambda A$ $(A \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R})$
      $c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i, j$
    - $C = AB$ (**!** $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}, C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ **!**)
      $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \quad \forall i, j$
      $AB \neq BA$ **!**
      $A(BC) = (AB)C$
      $AB = \hat{0} \not\Rightarrow A = \hat{0}$ v $B = \hat{0}$ **!**
      $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  - **speciális mátrixok**:
    - **egységmátrix**: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ $(e_{ij} = \delta_{ij})$
    - **transzponált mátrix** $(\tilde{A})$: $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$
    - **szimmetrikus mátrix**: $A = \tilde{A}$ $(a_{ij} = a_{ji})$
    - **antiszimmetrikus mátrix**: $A = -\tilde{A}$ $(a_{ij} = -a_{ji})$
    - $\forall$ mátrix szétbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére: $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + \tilde{A})}_{\text{szimm.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - \tilde{A})}_{\text{antiszimm.}}$
  - a mátrix **nyoma** (spur, trace): $\mathrm{sp}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ főátlóbeli elemek összege
  - i-edik sor j-edik eleméhez tartozó **almátrix** $(A_{(ij)})$:
    az i-edik sor és j-edik oszlop törlésével kapott mátrix
  - i-edik sor j-edik eleméhez tartozó **előjeles aldeterminláns**:
    $A^{(ij)} = (-1)^{i+j} \det(A_{(ij)})$ (a **sakktábla-szabály** szerint előjelezve)

- **sakktábla-szabály**:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- **adjungált mátrix** (A^{adj}): $A^{\mathrm{adj}}_{ij} = A^{(ji)}$
  (előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja)
  - 3×3-as mátrixokra:

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

  - $A \cdot A^{\mathrm{adj}} = A^{\mathrm{adj}} \cdot A = E \cdot \det A$
- **inverz mátrix**: $A^{-1} = \dfrac{A^{\mathrm{adj}}}{\det A}$ (csak akkor $\exists$, ha $\det A \neq 0$)
  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
  lineáris egyenletrendszer megoldására: $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

- **sajátértékek (λ), sajátvektorok (s) számítása**:
  - $\mathbf{s}$ olyan vektor, amelynek az $A\mathbf{s}$ transzformáció nem változtatja meg az irányát, csak a nagyságát: $A\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s}$
  - a λ-ek meghatározása: $\det(A - \lambda E) = 0$
    ált. eset: 3×3-as mátrix: $\lambda^3 - \mathrm{sp}A\,\lambda^2 + \mathrm{sp}A^{\mathrm{adj}}\lambda - \det A = 0$
    ált. eset: 2×2-as mátrix: $\lambda^2 - \mathrm{sp}A\,\lambda + \det A = 0$
  - a $\mathbf{s}$-ok meghatározása: λ-kat visszaírva: $(A - \lambda E)\mathbf{s} = \mathbf{0}$
  - szimmetrikus mátrixok: λ_i-k valósak és $\mathbf{s}_i \perp \mathbf{s}_j$
  - a normált $\mathbf{s}_i$-ekből képzett mátrix ($D = (\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2)$) az A mátrixot **diagonalizálja** (diagonális mátrixba forgatja): $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D^{-1}\,A\,D$

- ***Determinánsok***
  - $\det E = 1$, $\quad \det(\text{felső}\triangle), \det(\text{alsó}\triangle) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
  - $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
  - $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$