Matematikai módszerek a fizikában I.
Összefoglaló az 1. zh-hoz

- ***Vektorok***
  - Descartes-i koordinátarendszerben ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egymásra $\perp$ egységvektorok): $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{e}$ egységvektor ($|\mathbf{e}| = 1$), $\gamma = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által közbezárt szög)
  - $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i$
  - nagyság: $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
  - $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{e_a} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a}}{a}$
  - **Kronecker-delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

  - **Levi–Civita-szimbólum**:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i,j,k \text{ az 1,2,3 ciklikus permutációja (1,2,3/2,3,1/3,1,2)} \\ -1, & \text{ha } i,j,k \text{ az 1,2,3 antciklikus permutációja (1,3,2/2,1,3/3,2,1)} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

  - **skaláris szorzat** (eredménye: skalár):
    - $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = ab\cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} a_ib_i$
    - $\mathbf{a}^2 = a^2$
    - $\mathbf{ab} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
    - kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$
    - *nem* asszociatív: $(\mathbf{ab})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc})$
    - disztributív: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$
    - $\mathbf{ae} = a\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e})$ az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének a hossza
  - **vektoriális szorzat** (eredménye: vektor):
    - $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = ab\sin\gamma$ (paralelogramma előjeles területe)
    - iránya: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszer és $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$
    - $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k = \sum\limits_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k$

  - $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
  - antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
  - *nem* asszociatív: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
  - disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
  - $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}| = a \sin(\mathbf{a}, \mathbf{e})$ az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ vektorra merőleges síkra eső vetületének a hossza

- **vektoriális hármasszorzat:**
  - $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$
  - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$

- **vegyes hármasszorzat:**
  - $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$
  - az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata
  - $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - \\ -a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3 \end{matrix} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

- ***Determinánsok, lineáris egyenletrendszerek***
  - $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$
  - $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - \\ -a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3 \end{matrix}$ **Sarrus-szabály** (*CSAK* 3×3-as determinánsra!)
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$ **Kifejtési tétel** (j-edik oszlop szerint) (***KÉSŐBB LESZ***)

    ahol $\det(A_{ij})$ az a_{ij} elemhez tartozó $(n-1)$-ed rendű aldetermináns
  - $\det(A^T) = \det(A)$, ahol A^T: A transzponáltja (sorok $\leftrightarrow$ oszlopok)
  - $\det(A') = -\det(A)$, ahol A': A 2 sorát/2 oszlopát felcseréljük
  - $\det(A') = \det(A)$, ahol A': A egyik sorához/oszlopához egy másik sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk
  - $\det(A) = 0$, ha 2 oszlop/2 sor egymás számszorosa

– **Cramer-szabály 3D-ben:** $x_1, x_2, x_3 = ?$

$$x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c} = \mathbf{d} \quad ((\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0)$$

$$\begin{cases} x_1a_1 + x_2b_1 + x_3c_1 = d_1 \\ x_1a_2 + x_2b_2 + x_3c_2 = d_2 \\ x_1a_3 + x_2b_3 + x_3c_3 = d_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{(\boxed{\mathbf{d}}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \qquad x_2 = \frac{(\mathbf{a}, \boxed{\mathbf{d}}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \qquad x_3 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boxed{\mathbf{d}})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

– **Cramer-szabály** n **egyenlet és** n **ismeretlen esetén:** $x_1, x_2, \ldots, x_n = ?$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (\det(A) \neq 0)$$

A: a bal oldal együtthatóiból képzett determináns
A_i: A i-edik oszlopa kicserélve $\mathbf{d}$-vel

– homogén lineáris egyenletrendszer: ha $\mathbf{d} = \mathbf{0}$

– lineáris egyenletrendszerek **megoldhatósága**:

  - ha $\det(A) \neq 0$ és $d \neq \mathbf{0} \Rightarrow 1$ mego. (Cramer-szabály)
  - ha $\det(A) \neq 0$ és $d = \mathbf{0} \Rightarrow 1$ mego. (–||–): $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (**triviális mego.**)
  - ha $\det(A) = 0$ és $d = \mathbf{0} \Rightarrow \infty$ mego.
  - ha $\det(A) = 0$ és $d \neq \mathbf{0}$ és $\forall i: \ \det(A_i) = 0 \Rightarrow \infty$ mego.
  - ha $\det(A) = 0$ és $d \neq \mathbf{0}$ és $\exists i: \ \det(A_i) \neq 0 \Rightarrow$ nincs mego.

- ***Térgeometria***

– **egyenes**

  - paraméteres egyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$
    ($\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$: „kezdőpont”, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$: irányvektor, $t \in \mathbb{R}$: paraméter)
  - egyenletrendszere: $t = \dfrac{x - x_0}{v_x} = \dfrac{y - y_0}{v_y} = \dfrac{z - z_0}{v_z}$, ha $v_x, v_y, v_z \neq 0$

– **sík**

  - paraméteres egyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + p\mathbf{L} + q\mathbf{M}$
    ($\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$: „kezdőpont”, $\mathbf{L}, \mathbf{M}$ síkbeli vektorok ($\mathbf{L} \nparallel \mathbf{M}$), $p, q \in \mathbb{R}$: paraméterek)

- egyenlete: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$, ahol $\mathbf{n}=\mathbf{L}\times\mathbf{M}$ a sík normálvektora
- másképp: $xn_x+yn_y+zn_x=\text{állandó}=x_0n_x+y_0n_y+z_0n_z$
- tengelymetszetes alak: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, ha $a,b,c\neq 0$ (metszéspontok)

– **kör/gömb**

- egyenlete: $(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2=R^2$
  $\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$: középpont, R: sugár
- kör: $(x-c_x)^2+(y-c_y)^2=R^2$
- gömb: $(x-c_x)^2+(y-c_y)^2+(z-c_z)^2=R^2$

– **távolságok**

- pont $(\mathbf{r}_1)$ és egyenes $(\mathbf{r}_0+t\mathbf{v})$: $d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}|}{v}$
- pont $(\mathbf{r}_1)$ és sík $((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0)$: $d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}|}{n}$
- kitérő egyenesek $(\mathbf{r}_1+t_1\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{r}_2+t_2\mathbf{v}_2)$: $d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2|}$
- párhuzamos egyenesek $(\mathbf{r}_1+t_1\mathbf{v}$ és $\mathbf{r}_2+t_2\mathbf{v})$: $d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{v}|}{v}$