# Matematikai kiegészítés a fizikához
## 9. gyakorlat

**Összetett függvények deriválása**

- $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

**Iránymenti derivált:** $f : X \to Y$

- $l(t) : \mathbb{R} \to X$, $l(t) = \mathbf{r_0} + t\mathbf{e}$ ($\mathbf{r_0}, \mathbf{e} \in X$, $\mathbf{e} \neq 0$, $||\mathbf{e}|| = 1$, $\mathbf{e} = [\cos\alpha; \sin\alpha]$)
- $l(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $l(t)$ síkjában lévő, $\mathbf{e}$ irányú érintő: $\partial_e f(\mathbf{r_0}) = f'(\mathbf{r_0}) \cdot \mathbf{e}$

**Gradiens, divergencia, rotáció:**

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{v} = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$
  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vagy $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  $\varphi(x, y, z)$ skalár, $\mathbf{v}(x, y, z)$ vektor
- differenciáloperátorok: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$

  gradiens: $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}) = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$
  $(\operatorname{grad}\varphi)_i = \partial_i\varphi$

  divergencia: $\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum \partial_i v_i$
  $\operatorname{div}\mathbf{v} = \sum \partial_i v_i$

  rotáció: $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$

  $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$

  $$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{, ha } ijk = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{, ha legalább 2 megegyezik közülük} \end{cases}$$

  Laplace-operátor: $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \sum \partial_i^2$

---

1. Számítsuk ki $(f \circ g)'(t)$-t kétféleképpen!
   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$
   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6x$, $g(t) = (3\operatorname{ch} t, 5\operatorname{sh} t)$
2. Legyen $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$. Számítsuk ki az $\mathbf{e} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ iránymenti deriváltat az $\mathbf{r_0} = (1, 2)$ pontban!
3. A domborzatot a $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$ függvény határozza meg. Melyik irányba kezd folyni az $(1, 1, 2)$ pontjából az odahullott csapadék? (legnagyobb (legkisebb) meredekség) Melyik irányban 0 a derivált?
4. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2$ függvény iránymenti deriváltjának maximumát az $\mathbf{r_0} = (1, 4, 3)$ pontban, és adjuk meg a maximumhoz tartozó irányt!

---

5. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = C\mathbf{r}$ divergenciáját és rotációját!
6. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x)$ divergenciáját és rotációját!
7. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (-Cy/r^2, Cx/r^2)$ divergenciáját és rotációját!
8. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (v_{max} - Cz^2, 0, 0)$ divergenciáját és rotációját!