Matematikai kiegészítés a fizikához
8. gyakorlat

Parciális deriváltak

– $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ Jacobi-mátrixa:

$$f'=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 & \cdots\partial_n f_1\\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 & \cdots\partial_n f_2\\ \vdots & & & \vdots\\ \partial_1 f_k & \partial_2 f_k & \partial_3 f_k & \cdots\partial_n f_k\end{pmatrix}$$

– $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ másodrendű parciális deriváltak:

$$f''=\begin{pmatrix}\partial^2_{11}f & \partial^2_{21}f & \partial^2_{31}f & \cdots & \partial^2_{n1}f\\ \partial^2_{12}f & \partial^2_{22}f & \partial^2_{32}f & \cdots & \partial^2_{n2}f\\ \vdots & & & \vdots & \\ \partial^2_{1n}f & \partial^2_{2n}f & \partial^2_{3n}f & \cdots & \partial^2_{nn}f\end{pmatrix}$$

– **Young-tétel:** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, tfh. $\exists\partial^2_{ij}f$ és $\partial^2_{ji}f$ $\forall\mathbf{x}$-re egy $\mathbf{x_0}$ pont környezetében és folytonosak ($\mathbf{x_0}\in intD(f)$). Ekkor $\partial^2_{ij}f=\partial^2_{ji}f$.

Szélsőérték számítása ($f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $a\in intD(f)$)

– szükséges feltétel: $f'(a)=0$

– ha $f''(a)$ pozitív definit $\Rightarrow$ lokális minimum a-ban
ha $f''(a)$ negatív definit $\Rightarrow$ lokális maximum a-ban
ha $f''(a)$ indefinit $\Rightarrow$ nincs lokális szélsőérték a-ban

1. stacionárius helyek meghatározása: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ és $\frac{\partial f}{\partial y}=0$
2. $f''(x,y)$ a stacionárius helyeken: $D=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$
3. ha $D>0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ (f'' pozitív definit) $\Rightarrow$ lokális minimum
ha $D>0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ (f'' negatív definit) $\Rightarrow$ lokális maximum
ha $D<0$ (f'' indefinit) $\Rightarrow$ nincs lokális szélsőérték
ha $D=0\Rightarrow$ további vizsgálat szükséges
4. szélsőértékek kiszámítása

---

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$f(x,y)=x^2+y^3-3x^2y^4$$
$$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}+\frac{x^2y^2}{e^y}$$
$$f(x,y)=y^2e^{x^2+1}-\sin(xy)$$
$$f(x,y)=y^2\ln\sqrt{xy}+\operatorname{arc\,tg}(x^2y)$$

2. Mi lesz a $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ függvény Jacobi-mátrixa, ha

$$f(x,y)=\left(e^{x^2+\operatorname{sh}3x}\cos y,\ e^x\sin\left(y+\ln 2y\right),x^7\cos^3 y^2\right)$$

3. Számítsuk ki $f'(x,y,z)$-t, ha $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=\left(x^y,\ x^{y^z}\right)$
4. Mutassuk meg, hogy ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve $u(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, akkor $\Delta u:=\partial_1^2u(x,y)+\partial_2^2u(x,y)=0$.
5. Keressük meg az alábbi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!
   (a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;
   (b) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2y^2$;
   (c) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$.
6. Határozzuk meg a $z=2x^2-3y^2$ egyenlet által leírt felület $P(-2,1,5)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!
($s(x,y)=f(x_0,y_0)+f'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$)