Matematikai kiegészítés a fizikához

5. gyakorlat

- **Szétválasztható típusúra visszavezethető differenciálegyenletek:**

$$
\begin{aligned}
y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \\
u(x) &= \frac{y(x)}{x} \\
y(x) &= x \cdot u(x) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= f(u) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(u) - u}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= f(ax + by + c) \\
u(x) &= ax + by(x) + c \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= a + b \cdot f(u)
\end{aligned}
$$

- **Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek:** $y' + f(x)y = g(x)$
  - homogén egyenlet megoldása: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + f(x)y = 0 \quad \Rightarrow$ szétválasztható $\Rightarrow$ $y_h(x) = C \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = C \cdot y_0(x)$
  - inhomogén egyenlet megoldása: $y_p(x)$ egy partikuláris megoldás $\rightarrow$ behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe
    - *állandó variálásának módszere*: $y_p(x) = C(x)y_0(x)$ $(y_p'(x) = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x))$
    - $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

---

1. (a) $y' = \dfrac{y + x}{x}$

   (b) $y' = -\dfrac{y + x}{x}$
2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
3. $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$
4. $x\cos\dfrac{y}{x}y' = y\cos\dfrac{y}{x} - x$
5. $y' = x + y$
6. $y' = 2y + x + 1$
7. $y' = \mathrm{tg}^2(x + y)$
8. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$
9. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$
10. Forgásfelület alakú tükör, ami a forgástengellyel párhuzamosan érkező sugarakat egy pontban (az origóba) gyűjti. $y(x) = ?$