Matematikai kiegészítés a fizikához
3. gyakorlat

Ívhossz

- Legyen $r : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe.
  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$
  $l = \int_a^b \|\dot{r}(t)\| \, \mathrm{d}t$
- $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe esetén:
  $r(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$
  $l = \int_a^b \sqrt{(\dot{t})^2 + (\dot{f}(t))^2} \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2} \, \mathrm{d}t$
- Ha a görbe polárkoordinátákkal van megadva $(r(\varphi))$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$:
  $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} \, \mathrm{d}\varphi$

Forgástestek felszíne (palást)

- $y = f(x)$ függvényt megforgatva az x-tengely körül, $x \in [a, b]$: $F = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y'(x))^2} \, \mathrm{d}x$.
- $r(t) = (x(t),\ y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$: $F = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \, \mathrm{d}t$.

Forgástestek térfogata

- $y = f(x)$ függvényt megforgatva az x-tengely körül, $x \in [a, b]$: $V = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$.
- $r(t) = (x(t),\ y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$: $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t) \, \mathrm{d}t$.

---

1. Számítsuk ki a kövekező görbék ívhosszát!
   (a) Asztroid: $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.
   (b) Spirál: $r : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) := (a(t\sin t + \cos t),\ a(\sin t - t\cos t))$
   (c) Csavarvonal: $r : [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) := (t,\ R\cos t,\ R\sin t)$, ahol $h, R > 0$.
   (d) Csavarvonal: $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, $r(t) := (e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\cos t,\ e^{-t})$.
   (e) Archimédeszi spirál: $r : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $r(\varphi) = a\varphi$.
   (f) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3}$ függény grafikonjának ívhossza.

2. Számítsuk ki a kövekező forgástestek felszínét és térfogatát!
   (a) r alapkörsugarú, m magasságú körkúp. $(y = r/m \cdot x)$
   (b) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ellipszis x-tengely körüli megforgatásával kapott ellipszoid.
   (c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ciklois egyik ívének x-tengely körüli megforgatásával kapott alakzat.