Matematikai kiegészítés a fizikához
11. gyakorlat

- **Kettős integrál transzformációja:** Gyakran egy általánosabb $D \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g : T \to D$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_D f = \int_T f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \left|\det\big(g'(u,v)\big)\right| \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v.$$

Origó középpontú, R sugarú körön:
$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le R^2\big\}$
$T = [0,R] \times [0,2\pi]$ és $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, \ r\sin\varphi)$. Ekkor

$$\det(g'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\int_D f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi.$$

- **Hármas integrál:**
  - Téglatartományon: (integrálás sorrendje felcserélhető)

$$\int_V f(x,y,z) \ \mathrm{d}V = \int_{a_z}^{b_z}\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} f(x,y,z) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z$$

  - Normáltartományon: N normáltartomány xy-síkon és legyen $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in N$:
    $V = (x,y,z) : (x,y) \in N, \ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$ (integrálás sorrendje meghatározott)

$$\int_V f(x,y,z) \ \mathrm{d}V = \int\int_N \left\{ \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) \ \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x$$

- **Gauss–Osztogradszkij-tétel:** $\oint_F \mathbf{v} \ \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{v} \ \mathrm{d}V.$

- **Stokes-tétel:** $\oint_L \mathbf{v} \ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot}\mathbf{v} \ \mathrm{d}\mathbf{A}.$

---

1. Számítsuk ki az alábbi kétdimenziós integrálokat!
   (a) $\int_D e^{3x+4y} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$
   (b) Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

2. Számítsuk ki az alábbi kétdimenziós integrálokat, ahol $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\big\}$ a zárt egységkörlap a síkon!
   (a) $\int_D x \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$
   (b) $\int_D y^2 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$

3. Számítsuk ki az alábbi kétdimenziós integrálokat!
   (a) $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$, $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0\big\}$
   (b) $\int_D 6xy^2 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$, $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0\big\}$
   (c) $\int_D \ln(x^2 + y^2)$, $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \le 0\big\}$

4. Számítsuk ki az alábbi háromdimenziós integrálokat!
   (a) $f(x,y,z) = x^2 + 4yz$, $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ (egységkocka)
   (b) $f(x,y,z) = 2xy$, $V = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 - x, \ 0 \le z \le 1 - x - y\}$
   (c) $f(x,y,z) = 2y$, $V = \big\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\big\}$

5. Határozzuk meg a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x, \ 0, \ 0)$ vektortérnek az egységkocka felszínére vett felületi integrálját!