Matematikai kiegészítés a fizikához

10. gyakorlat

Gradiens, divergencia, rotáció:

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{v} = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$
  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vagy $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  $\varphi(x, y, z)$ skalár, $\mathbf{v}(x, y, z)$ vektor
-
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{, ha } ijk = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{, ha legalább 2 megegyezik közülük} \end{cases}$$
-
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } i = j \\ 0 & \text{, ha } i \neq j \end{cases}$$
$$\sum_i \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$
  Laplace-operátor: $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \sum \partial_i^2$

Kettős integrál:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $D = [a, b] \times [c, d]$.
$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
- $g_1,\ g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények:
  $N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$: (az x-tengelyre nézve) normáltartomány.
$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

---

1. Legyen $\varphi = r^3$. Határozzuk meg $\operatorname{grad} r^3$-t, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} r^3$-t, $\operatorname{div}\operatorname{grad} r^3$-t!
2. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ divergenciáját és rotációját!
3. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{br})$ divergenciáját és rotációját!
4. Legyen $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{v}$ örvénymentes!
5. Legyen $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{w}$. Igazoljuk, hogy $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$!
6. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = r^n\mathbf{r}$ divergenciáját és rotációját!
7. Igazoljuk, hogy $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{v}$!

8. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!
   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$
   (b) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$
   (c) $\displaystyle\int_D e^{-3x-4y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$
9. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
   (a) $f(x, y) = 1$, $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, 1],\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{y}$, $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1, 1],\ 0 \le y \le (1 - x)^2\}$
10. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.