

MATEMATIKAI KIEGÉSZÍTÉS A FIZIKÁHOZ

2. PRÓBA ZH

Minden lapon legyen rajta a **szerző** neve! Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz pusztá közléséért nem jár pont.

1. Legyen $f(x, y, z) = \left(\cos(x + 2y) \cdot e^{x^2 + 3z^{-1}}, \frac{3x+2}{z^7} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$. Írd fel f Jacobi-mátrixát!
2. Határozd meg az $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ függvény lokális szélsőértékeit!
3. Írd fel az $f(x, y) = x^3 + \sin(xy)$ felület $P(1, 0, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!
4. Az $f(x, y) = x^2 - y^2 + 8x - 2$ felület $P(1, 1, 6)$ pontjában mely irányban nincs sem emelkedés, sem lejtés?
5. Számítsd ki az alábbi mennyiségeket! (\mathbf{a} konstans vektor, \mathbf{r} helyvektor, $r = |\mathbf{r}|$)
 - (a) $\mathbf{v}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0 \right)$. Mi lesz $\operatorname{div} \mathbf{v}$ és $\operatorname{rot} \mathbf{v}$?
 - (b) $\operatorname{div}((\mathbf{a}\mathbf{r})\mathbf{r})$
6. (**szorg.**) Jelölje N az $N = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x + 1 \leq y \leq 4 - 2x)\}$ halmazt. Számítsd ki az $\int_N y - x$ integrált! (1 pont)
7. (**szorg.**) Számítsd ki egy R sugarú félgömb térfogatát! (polárkoordinátákra való áttéréssel) (1 pont)

szorg. Számítsd ki az $f(x, y, z) = x^2yz$ függvény integrálját a V tartományon. V tartományt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelület első ténnyolcadba eső része ($x, y, z \geq 0$) határolja alulról, a $z = 1$ felület felülről, oldalról az $x = 0$ és $y = 0$ síkok, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ hengerfelület. Rajzold le a V tartományt! (2 pont)