# Kalkulus gyakorlat - Megoldásvázlatok
## Fizika BSc I/2

### 8. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2 \qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=y^3 \qquad \text{(c)}\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad \text{(e)}\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(f)}\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

**Megoldás.** (a) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=0$.

(b) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.

(c) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.

(d) $\partial_1 f(x,y)=2xy^4$, $\partial_1 f(x,y)=4x^2y^3$.

(e) $f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}$, így $\partial_1 f(x,y)=e^{-y^2}e^{-x^2}(-2x)$, $\partial_2 f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}(-2y)$.

(f) $\partial_1 f(x,y)=2\dfrac{xy^2}{e^y}$, $\partial_2 f(x,y)=x^2\left(\dfrac{2ye^y-e^yy^2}{(e^y)^2}\right)=x^2\left(\dfrac{2y-y^2}{e^y}\right)$.

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_3 f$, $\partial_1\partial_2\partial_3 f$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:

(a) $f(x,y,z)=5z$,

(b) $f(x,y,z)=x+y+z$,

(c) $f(x,y,z)=ze^{x-y}$.

**Megoldás.** (a) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=0$, $\partial_3 f(x,y)=5$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(b) $\partial_1 f(x,y)=1$, $\partial_2 f(x,y)=1$, $\partial_3 f(x,y)=1$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(c) $\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2 f(x,y)=-ze^{x-y}$, $\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$. A másodrendű deriváltak: $\partial_1^2 f(x,y)=\partial_1\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2^2 f(x,y)=\partial_2\partial_2 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_1\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$. A harmadrendű deriváltak: $\partial_1\partial_2\partial_3 f(x,y)=-e^{x-y}$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f(x,y)=-e^{x-y}$.

3. Mi lesz a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa, ha $g(x,y)=$

$$\text{(a)}\quad (x,\ y) \qquad \text{(b)}\quad \left(x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4+x^2y^2+y^4\right) \qquad \text{(c)}\quad (e^x\cos y,\ e^x\sin y)$$

$$\text{(d)}\quad \left(e^{x^2+\operatorname{sh}3x}\cos y,\ e^x\sin\left(y+\ln 2y\right)\right)$$

**Megoldás.** Ha $f=(f_1,\ f_2)$, akkor

$$f'=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1 & \partial_2 f_1\\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2\end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően $g'(x,y)=$

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix}4x^3+2xy^2 & 4y^3+2yx^2\\ 4x^3+2xy^2 & 4y^3+2yx^2\end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix}e^{x^2+\operatorname{sh}3x}(2x+3\operatorname{ch}3x)\cos y & -e^{x^2+\operatorname{sh}3x}\sin y\\ e^x\sin\left(y+\ln 2y\right) & e^x\cos\left(y+\ln 2y\right)(1+1/y)\end{pmatrix}$$

4. Számítsuk ki $f'(x,y,z)$-t, ha $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=$

$$\text{(a)}\quad (x^2y,\ y+z) \qquad \text{(b)}\quad \left(x^y,\ x^{y^z}\right)$$

**Megoldás.**

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix}yx^{y-1} & x^y\ln x & 0\\ y^zx^{y^z-1} & x^{y^z}(\ln x)zy^{z-1} & x^{y^z}(\ln x)y^z\ln y\end{pmatrix}$$

5. Számítsuk ki $f''(3,4)$-et, ahol

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = xy \qquad \text{(b)} \quad f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \qquad \text{(c)} \quad f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

**Megoldás.** Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, akkor

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_2\partial_1 f \\ \partial_1\partial_2 f & \partial_2^2 f \end{pmatrix}.$$

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 140 & 48 \\ 48 & 210 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{25^2} & -\frac{24}{25^2} \\ -\frac{24}{25^2} & -\frac{7}{25^2} \end{pmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy ha $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, illetve $u(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0.$$

**Megoldás.** (a)

$$\partial_1^2(\ln(x^2+y^2)) = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2^2(\ln(x^2+y^2)) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

az összegük valóban nulla.

(b)

$$\partial_1^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_2^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

az összeg itt is nulla.

Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$, azaz $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, akkor az $f''(a)$ mátrix pozitív definitsége esetén $a$-ban szigorú lokális minimum, az $f''(a)$ mátrix negatív definitsége esetén $a$-ban szigorú lokális maximum van. Ha az $f''(a)$ mátrix indefinit, akkor az $a$ pontban nincs szélsőérték.

Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor

(i) $A$ pozitív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} > 0$,

(ii) $A$ negatív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} < 0$,

(iii) $A$ indefinit, ha $\det A < 0$.

7. Keressük meg az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(b) $f(x,y) = (x^2+1)(y + \frac{1}{y})$;

(c) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$;

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

(e) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

(f) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$.

**Megoldás.** (a) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y = 0$, $\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x = 0$. Az első egyenletből $y = x^2$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = x^4 - x = x(x^3-1) \iff x = 0 \text{ vagy } x = 1.$$

Vagyis az $f'(x,y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x,y) = (0,0)$, illetve $(1,1)$.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,0) = -9 < 0$, azaz $f''(0,0)$ indefinit, vagyis $(0,0)$ nem szélsőértékhely; az $f''(1,1)$ mátrix viszont pozitív definit, vagyis $(1,1)$ szigorú lokális minimum.

(b) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 2x(y + \frac{1}{y}) = 0$, $\partial_2 f(x,y) = (x^2+1)(1 - \frac{1}{y^2}) = 0$. A fenti egyenletrendszer megoldásai: $x = 0, y = \pm 1$, azaz az $f'(x,y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x,y) = (0,1)$ illetve $(0,-1)$.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y + \frac{1}{y}\right) & 2x\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \\ 2x\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) & 2(x^2+1)\frac{1}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,1) = 8 > 0$ és $4 > 0$, azaz $f''(0,1)$ pozitív definit, vagyis $(0,1)$ szigorú lokális minimum; $\det f''(0,-1) = -8 < 0$, azaz $f''(0,-1)$ indefinit, vagyis $(1,1)$ nem szélsőértékhely.

(c) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y = 0$, $\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x = 0$. Az első egyenletből $y = x^3$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = 4x^9 - 4x = 4x(x^8 - 1) \iff x = 0,\ x = 1 \text{ vagy } x = -1.$$

Tehát az $f'(x,y) = 0$ egyenlet megoldásai: $(x,y) = (0,0),\ (1,1)$ illetve $(-1,-1)$. Mivel

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

ezért

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad f''(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0,0) = -16 < 0$, azaz $f''(0,0)$ indefinit, vagyis $(0,0)$ nem szélsőértékhely; $\det f''(1,1) = 128 > 0$ és $12 > 0$, azaz $f''(1,1)$ pozitív definit, vagyis $(1,1)$ szigorú lokális minimum; $f''(1,1) = f''(-1,-1)$, így a $(-1,-1)$ pontban is szigorú lokális minimum van.

(d) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 2x = 0$ $\partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y = 0$. A fenti egyenleteket átalakítva

$$\begin{aligned} 2x(2x^2-1) = 0 &\Longrightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ vagy } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 4y(y^2-1) = 0 &\Longrightarrow y = 0,\ y = 1 \text{ vagy } y = -1. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x,y) = (0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right).$$

A második derivált

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix},$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} f''(0,0) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit,} \\ f''(0,1) = f''(0,-1) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,} \\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,} \\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right) = f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit} \end{aligned}$$

Tehát a függvénynek a $(0,0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(e) A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) = 8x^3 - 2x = 0 &\Longrightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{2} \text{ vagy } x = -\frac{1}{2} \\ \partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y = 0 &\Longrightarrow y = 0,\ y = 1 \text{ vagy } y = -1. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x,y) = (0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ \left(\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{1}{2},1\right),\ \left(\frac{1}{2},-1\right),\ \left(-\frac{1}{2},0\right),\ \left(-\frac{1}{2},1\right),\ \left(-\frac{1}{2},-1\right).$$

Mivel

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

ebből következően

$$f''(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \quad \text{negatív definit,}$$

$$f''(0,1)=f''(0,-1)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$

$$f''\left(\frac{1}{2},0\right)=f''\left(-\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$

$$f''\left(\frac{1}{2},1\right)=f''\left(\frac{1}{2},-1\right)=f''\left(-\frac{1}{2},1\right)=f''\left(-\frac{1}{2},-1\right)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit}$$

Tehát a függvénynek a $(0,0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(f) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x,y)=2x-2y=0$ $\partial_2 f(x,y)=2y-2x=0$. Az egyenletrendszer megoldása: $x=y$, vagyis az $f'(x,y)=0$ egyenletnek az $(x_0,x_0)$ típusú pontok tesznek eleget. A második derivált:

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=f''(x_0,x_0).$$

Azonban itt $\det f''(x_0,x_0)=0$, azaz a mátrix most csak szemidefinit, így nem alkalmazható az eddigi módszer. Azonban tetszőleges $(x_0,x_0)$ pontra

$$f(x_0,x_0)=0\le (x-y)^2=f(x,y),$$

vagyis az $(x_0,x_0)$ pont lokális (sőt globális) minimum (de nem szigorú minimum).

## 9. gyakorlat

Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az $f$ primitív függvényén egy olyan $F:\Omega\to\mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F'=f$, vagyis $\partial_i F(x)=f_i(x)$ minden $i=1,2,\dots,n$-re. Ezt az $F$ függvényt az $f$ potenciálfüggvényének is nevezik.

Ha $\varphi:[a,b]\to\Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, akkor az ívhossza

$$l(\varphi)=\int_a^b |\dot\varphi(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi:[a,b]\to\Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a,b])\subset\Omega$. Ekkor az $f$ függvény $\varphi$ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\rangle\ \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük. Ha $f$-nek létezik $\Omega$-ban primitív függvénye, akkor

$$\int_\varphi f = F\big(\varphi(b)\big)-F\big(\varphi(a)\big).$$

Ezt az $F$ függvényt az $f$ potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha $f$-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a)=\varphi(b)$) $f$ vonalintegrálja $\varphi$ mentén 0.

1. Számítsuk ki az $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^3}$ függény grafikonjának ívhosszát.

   **Megoldás.** Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény grafikonjának az ívhossza nem más, mint a $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=(t,f(t))$ görbe ívhossza, tehát

$$\int_a^b\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\ \mathrm{d}t=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}t}\ \mathrm{d}t=\frac{4}{9}\int_0^4\frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}\ \mathrm{d}t=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4=\frac{8}{27}(\sqrt{1000}-1)\approx 9{,}07.$$

2. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t):=(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a>0$.

   **Megoldás.** A görbe ívhosszának képletét felírva

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\ \mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{2\pi}3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\ \mathrm{d}t=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\ \mathrm{d}t=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\ \mathrm{d}t=3a\left[-\cos 2t\right]_0^{\pi/2}=6a.$$

3. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.

**Megoldás.**

$$l(\varphi) = \int_0^h \sqrt{1 + r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^h \sqrt{1+r^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{1+r^2}\int_0^h 1\ \mathrm{d}t = h\sqrt{1+r^2}.$$

4. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

(a) $f(x,y) = (x,\ y)$ (b) $f(x,y) = \left(x^2 + xy^2,\ x^2y + y^3\right)$ (c) $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

**Megoldás.** Ha van primitív függvény, azaz van olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\partial_1 F = f_1$ és $\partial_2 F = f_2$, akkor

$$F(x,y) = \int f_1(x,y)\ \mathrm{d}x + c(y),$$

ahol a $c(y)$ függvény a

$$\partial_2 F = \partial_2 \left( \int f_1(x,y)\ \mathrm{d}x + c(y) \right) = f_2.$$

összefüggésből határozható meg.

(a) $F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}.$

(b)

$$\int f_1(x,y)\ \mathrm{d}x = \int x^2 + xy^2\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y),$$

így

$$f_2(x,y) = x^2y + y^3 = \partial_y \left( \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y) \right),$$

azaz $c'(y) = y^3$. Így a primitív függvény

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}.$$

(c) Ez már egy korábbi feladatsoron is szerepelt:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x,y) = (-y,\ x)$.

**Megoldás.** $\dot{\varphi}(t) = (-\sin t,\ \cos t)$, így

$$\int_\varphi f = \int_0^\pi \langle(-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi (-\sin t)^2 + (\cos t)^2\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}t = \pi.$$

6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1,0)$ és $(1,2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x,y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$.

**Megoldás.**

$$\int_\varphi f = \int_0^1 \left\langle \left(e^{-1+2t},\ 1\right), (0,2) \right\rangle\ \mathrm{d}t = 2.$$

7. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x,y) = (x+y,\ x+y)$.

**Megoldás.** Az $f$ függvény egy primitív függvénye $F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + \dfrac{y^2}{2}$, így

$$\int_\varphi f = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = 0.$$

Zárt görbe mentén minden primitív függvénnyel rendelkező függény vonalintegrálja zérus.

8. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

**Megoldás.** Korábban láttuk, hogy $f$ egy primitív függvénye $F(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. Ezért

$$\int_\varphi f = \frac{1}{2}\ln(0^2+1^2) - \frac{1}{2}\ln(3^2+0^2) = -\frac{1}{2}\ln 9 = -\ln 3.$$

## 10. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

**1. Tétel (Fubini).** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor*

$$\int_D f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\ dx \right)\ dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}$$

halmazt (az $x$-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan $N_y$ tartományra, amely az $y$-tengelyre nézve normáltartomány.

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;

   (b) $\displaystyle\int_D \sin y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;

   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$;

   (e) $\displaystyle\int_D \cos(x + z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

   **Megoldás.** (a)

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{x^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \int_1^2 x^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2\ \mathrm{d}y = \frac{7}{3} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{7}{3} [\operatorname{arc\,tg} y]_0^1 = \frac{7\pi}{12}.$$

   (b)

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \sin y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \sin y \int_0^1 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \sin y \cdot 1\ \mathrm{d}y = 0,$$

   mert 0 közepű intervallumon páratlan függvény integrálja zérus.

   (c)

$$\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[ \frac{(\sqrt{x} + y)^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3} \left( \left(\sqrt{x}+1\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^3 \right)\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left( x + \sqrt{x} + \frac{1}{3} \right)\ \mathrm{d}x = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

   (d)

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \cos z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos z \int_0^{\pi/2} \cos y \int_0^{\pi/2} \cos x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \left( \int_0^{\pi/2} \cos x\ \mathrm{d}x \right)^3 = 1.$$

(e)

$$\int_D \cos(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \big[\sin(x+z)\big]_{x=0}^{\pi/2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}+z\Big) - \sin z\Big)\ \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\Big[-\cos\Big(\frac{\pi}{2}+z\Big)+\cos z\Big]_{z=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\Big(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\Big) = 0.$$

2. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

   (a) $f(x,y)=1,\quad N_x := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1],\ 0\le y\le 1-x^2\big\}$;

   (b) $f(x,y)=xy^2,\quad N_x := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\big\}$;

   (c) $f(x,y)=\sqrt{y},\quad N_x := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,1],\ 0\le y\le (1-x)^2\big\}$.

   **Megoldás.** (a)

$$\int_{N_x} f = \int_0^1\int_0^{1-x^2} 1\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^1 [y]_0^{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 1-x^2\ \mathrm{d}x = \Big[x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(b)

$$\int_{N_x} f = \int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x\Big[\frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 x^4-x^7\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big[\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\Big]_0^1 = \frac{1}{40}.$$

(c)

$$\int_{N_x} f = \int_{-1}^1\int_0^{(1-x)^2} \sqrt{y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \Big[\frac{2}{3}y^{3/2}\Big]_0^{(1-x)^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{2}{3}(1-x)^3\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[\frac{-(1-x)^4}{4}\Big]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

3. Számítsuk ki az $f(x,y)=xy$ függvény integrálját az $y=x^2-1$ és az $y=x+1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

   **Megoldás.** A megadott parabola és egyenes az $x=-1$ és $x=2$ pontban metszik egymást, ezért a normáltartomány most az $N_x := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,2],\ x^2-1\le y\le x+1\big\}$ halmaz lesz.

$$\int_{N_x} f = \int_{-1}^2\int_{x^2-1}^{x+1} xy\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^2 x\int_{x^2-1}^{x+1} y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^2 x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2-1}^{x+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 -x^5+3x^3+2x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6}+\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\Big]_{-1}^2 = \frac{27}{8}.$$

## 11. gyakorlat

Gyakran egy általánosabb $Q\subset\mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T\subset\mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x,y): T\to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_Q f = \int_T f\big(g_1(u,v),g_2(u,v)\big)\,\big|\det\big(g'(u,v)\big)\big|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

ahol tehát a $g$ leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a $T$ halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha például egy origó középpontú, $R$ sugarú körön kell integrálni, akkor $Q=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le R^2\big\}$, $T=[0,R]\times[0,2\pi]$ és $g(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$. Ekkor

$$\det(g'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r$$

és így

$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi.$$

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\big\}$ a zárt egységkörlap a síkon!

$$\text{(a)}\ \int_D 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad \text{(b)}\ \int_D x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad \text{(c)}\ \int_D y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad \text{(d)}\ \int_D x^2+y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

   **Megoldás.** Polártranszformációval, vagyis az $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\ \big(r\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi]\big)$ helyettesítéssel

$$\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r.$$

(a)

$$\int_D 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r 2\pi \,\mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi.$$

(b)

$$\int_D x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\cos\varphi r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}r = 0.$$

(c)

$$\int_D y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^3 \pi \,\mathrm{d}r = \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(d)

$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$.

$$\text{(a)} \quad \int_D \sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \qquad \text{(b)} \quad \int_D 6xy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

**Megoldás.** (a) A megoldást polártranszformációval számolhatjuk ki, vagyis az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\big(r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi]\big)$ helyettesítéssel, ugyanis $D$ az egységkör $y \geq 0$ félsíkba eső része:

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\ r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{\pi} r^2 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

(b) A megoldást itt is polártranszformációval számolhatjuk ki, azaz az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\big(r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi]\big)$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}\int_D 6xy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{\pi} 6r\cos\varphi\ r^2\sin^2\varphi\ r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 6r^4 \int_0^{\pi} \cos\varphi \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^1 6r^4 \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\pi} \mathrm{d}r = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}r = 0.\end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az $x+y=1$, $x+y=2$, $y=3x$, $y=4x$ görbék által határolt síkidom területét!

**Megoldás.** A keresett síkidom területe nem más, mint a konstans 1 függvény integrálja a fenti egyenesek által közrefogott síkidomon. Legyen $u = x+y$ és $v = y/x$, a fentiek szerint a síkidom pontjaira $u \in [1,2]$ és $v \in [3,4]$ teljesül. Legyen $g$ az a függvény, amely a $T = [1,2] \times [3,4]$ téglalapot a keresett $Q$ síkidomra képezi:

$$g(u,v) = \left(\frac{u}{v+1},\ \frac{uv}{v+1}\right).$$

A $g$ függvény deriváltjának determinánsa:

$$\det g'(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v+1} & -\dfrac{u}{(v+1)^2} \\ \dfrac{v}{v+1} & \dfrac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^3} + \frac{uv}{(v+1)^3} = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

A keresett terület tehát

$$\int_Q 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_3^4 \frac{u}{(v+1)^2} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_1^2 u \left[-\frac{1}{v+1}\right]_3^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{20} \int_1^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{3}{40}.$$