Kalkulus gyakorlat - Megoldásvázlatok
Fizika BSc I/2

1. gyakorlat

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a)

$$\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\int_0^1 3x^5 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0;$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\big[\ln|\cos x|\big]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\cos\frac{\pi}{3} + \ln\cos\frac{\pi}{6} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\sqrt{3}.$$

(b) A primitív függvényt mindkét esetben parciális integrálással határozhatjuk meg.

Egy primitív függvény $xe^x - e^x$, ezért

$$\int_0^2 xe^x \, \mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0e^0 - e^0) = e^2 + 1.$$

Az $x \mapsto x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ függvény egy primitív függvény, így

$$\int_0^3 \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x = \left[x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]_0^3 = \left(3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln(1 + 3^2)\right) - 0 = 3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln 10.$$

(c) Ezekben a feladatokban helyettesítéses integrálással lehet egy-egy primitív függvényt megkeresni.

A $t = 3x + 4$ helyettesítés után $x = \frac{t-4}{3}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$, így

$$\int (3x + 4)^3 \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{3} \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{12} + C = \frac{(3x + 4)^4}{12} + C,$$

ezért

$$\int_1^2 (3x + 4)^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{(3x + 4)^4}{12}\right]_1^2 = \frac{7599}{12} = 633,25.$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítés után $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, így

$$\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\int te^t \, \mathrm{d}t = 2\left(te^t - \int e^t \, \mathrm{d}t\right) = 2e^t(t - 1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C,$$

ezért

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\left[e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)\right]_0^1 = 2.$$

A $t = \arc\sin x$ helyettesítés után $x = \sin t,\ \ \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arc\sin x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C,$$

ezért

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\arc\sin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Végül a $t = e^x$ helyettesítés után $x = \ln t,\ \ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int 1-\frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1)+C,$$

vagyis

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = \left[e^x - \ln(e^x+1)\right]_0^1 = (e-\ln(e+1)) - (1-\ln 2).$$

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!
   (a) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le y\le 4-x^2\right\}$;
   (b) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2\le y\le x+2\right\}$;
   (c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\ge 0,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\right\}$;
   (d) az $y=\sin x$ és az $y=(2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom.

Megoldás. (a) A megadott parabola az $x=\pm 2$ pontokban metszi az x-tengelyt, a keresett terület pedig az $y=4-x^2$ függvény grafikonja alatti terület a $[-2,2]$ intervallumon, ami $\int_{-2}^2 4-x^2\ \mathrm{d}x = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$.

(b) A kérdéses síkidom nem más, mint az $y=x+2$ egyenes és az $y=x^2$ parabola által bezárt síkrész. Az egyenes és a parabola metszéspontjainak abszcisszái -1 és 2. A keresett területet nem más, mint a $[-1,2]$ intervallumon értelmezett $f(x)=x+2$ grafikonja alatti terület és a $g(x)=x^2$ grafikonja alatti terület különbsége. A Newton-Leibniz formulából az első terület $\int_{-1}^2 x+2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^2 = (2+4)-(\frac{1}{2}-2) = \frac{15}{2}$, míg a második $\int_{-1}^2 x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3}-(\frac{-1}{3}) = 3$. Tehát a kérdéses terület $\frac{15}{2}-3=\frac{9}{2}$.

(c) A kérdéses terület két integrál különbségeként áll elő: a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $f(x)=\sqrt{x}$ és a $g(x)=x^2$ függvények grafikonja alatti területek különbségeként. A terület tehát $\int_0^1\sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

(d) A keresett terület most is megkapható két integrál különbségeként: $T=\int_0^{\pi/2}\sin x\ \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2}(2/\pi)x\ \mathrm{d}x = 1-\pi/4$.

2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények primitív függvényeit!

(a)

$$\int \frac{1}{x+3}\ \mathrm{d}x = \ln|x+3| + C;$$
$$\int \frac{1}{(x-3)^4}\ \mathrm{d}x = \int (x-3)^{-4}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-3)^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-3)^3}+C;$$
$$\int \frac{3x+6}{5x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int\frac{5x+10}{5x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int\frac{5x-1+11}{5x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int 1+\frac{11}{5x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int 1+\frac{11}{5}\frac{5}{5x-1}\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{5}x + \frac{33}{25}\ln|5x-1| + C.$$

(b)

$$\int \frac{2x}{x^2+9}\ \mathrm{d}x = \ln(x^2+9)+C;$$
$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+27}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+27)+C;$$
$$\int \frac{6x^2-2}{x^3-x+18}\ \mathrm{d}x = 2\int\frac{3x^2-1}{x^3-x+18}\ \mathrm{d}x = 2\ln\left|x^3-x+18\right|+C.$$

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+1)+C;$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)+4}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+25}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x-3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{8}\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)}{1/4} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

(d)

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2(x-1)(x-1/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(A+B)x - B - A/2}{(x-1)(x-1/2)}\,\mathrm{d}x,$$

amiből következik, hogy $A+B=0$ és $-B-A/2=1$, azaz $A=2$, $B=-2$, így ezeket az értékeket visszaírva

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-1/2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x-1/2| + C;$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4x^2+13x-9}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{x^2(A+B+C) + x(2A+3B-C) - 3A}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

amiből $A+B+C=4$, $2A+3B-C=13$ és $-3A=-9$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $A=3$, $B=2$ és $C=-1$,

$$= \int \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C.$$

2. Számítsuk ki az alábbi függvények primitív függvényeit!

(a) A $t = \arcsin x$ helyettesítés után $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

(b) A $t = \operatorname{ar\,sh} x$ helyettesítés után $x = \operatorname{sh} t$, $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t = \int \operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1+\operatorname{ch} 2t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ar\,sh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

(c) A $t = \operatorname{ar\,ch} x$ helyettesítés után $x = \operatorname{ch} t$, $\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{sh} t\ \mathrm{d}t = \int \operatorname{sh}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t - 1\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{ar\,ch} x\right) + C.\end{aligned}$$

(d) Mivel $4-x^2 = 4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$, ezért a $t = \arcsin\frac{x}{2}$ helyettesítés után $x = 2\sin t$, $\mathrm{d}x = 2\cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = 2\int 1+\cos 2t\ \mathrm{d}t = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C\\ &= 2\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

(e) Mivel $-x^2+4x-3=1-(x-2)^2$, ezért a $t=\arcsin(x-2)$ helyettesítés után $x=\sin t+2,\ \ \mathrm{d}x=\cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int\sqrt{-x^2+4x-3}\ \mathrm{d}x=\int\sqrt{1-(x-2)^2}\ \mathrm{d}x=\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x-2)+(x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\right)+C.$$

(f) Mivel $x^2+2x+5=4\Big(\big(\frac{x+1}{2}\big)^2+1\Big)$, ezért a $t=\operatorname{ar\,sh}\frac{x+1}{2}$ helyettesítés után $x=2\operatorname{sh}t-1,\ \ \mathrm{d}x=2\operatorname{ch}t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int\sqrt{x^2+2x+5}\ \mathrm{d}x=2\int\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}x=4\int\operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t=2\int 1+\operatorname{ch}2t\ \mathrm{d}t=2\left(t+\frac{\operatorname{sh}2t}{2}\right)+C$$
$$=2\left(\operatorname{ar\,sh}\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\right)+C.$$

3. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{(a)}\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\qquad\text{(b)}\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x\qquad\text{(c)}\ \int_0^{+\infty}2e^{-x}\ \mathrm{d}x\qquad\text{(d)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\text{(e)}\ \int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\ \mathrm{d}x\qquad\text{(f)}\ \int_0^{+\infty}xe^{-x}\ \mathrm{d}x\qquad\text{(g)}\ \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x$$

Megoldás. (a)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\big[\ln x\big]_1^t=\lim_{t\to+\infty}\ln t-\ln 1=+\infty,$$

mert $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

(b)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)=1.$$

(c)

$$\int_0^{+\infty}2e^{-x}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t 2e^{-x}\ \mathrm{d}x=-2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t -e^{-x}\ \mathrm{d}x=-2\lim_{t\to+\infty}\big[e^{-x}\big]_0^t=-2\lim_{t\to+\infty}(e^{-t}-1)=2,$$

hiszen $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}=0$.

(d)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x+\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\big[\operatorname{arc\,tg}x\big]_t^0+\lim_{u\to+\infty}\big[\operatorname{arc\,tg}x\big]_0^u$$
$$=-\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}t+\lim_{u\to\infty}\operatorname{arc\,tg}u=-\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

(e) Mivel $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ egy primitív függvénye $\dfrac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)$, ezért

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{(x-1)(x+1)}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)\right]_2^t$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)-\left(\ln|2-1|-\ln|2+1|\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+\frac{\ln 3}{2}.$$

Mivel t-vel $+\infty$-hez tartunk, azért az abszolútérték elhagyható, és így

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\ \mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{\ln 3}{2}=0+\frac{\ln 3}{2}=\frac{\ln 3}{2},$$

ugyanis $\ln\frac{t-1}{t+1} = \ln\frac{t+1-2}{t+1} = \ln(1-\frac{2}{t+1})$, és ez a függvény $t \to +\infty$ esetén $\ln 1 = 0$-hoz tart.

(f) A $[0, +\infty)$ intervallumon xe^{-x} egy primitív függvénye

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x},$$

így

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}[(-te^{-t} - e^{-t}) - (0e^0 - e^0)] = 1.$$

(g) A $[2, +\infty)$ intervallumon $\dfrac{1}{x\ln x}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x),$$

így

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_2^t = \lim_{t\to+\infty}\big(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\big) = +\infty.$$

2. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{1}{x^2} \qquad \text{(c)}\ \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)}\ \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{(e)}\ \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. (a)

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+}\left[\ln x\right]_t^1 = \lim_{t\to0+} \ln 1 - \ln t = \infty,$$

mert $\lim\limits_{t\to0+} \ln t = -\infty$.

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to0+} -1 + \frac{1}{t} = \infty.$$

(c)

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+}\int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\lim_{t\to0+}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_t^8 = \frac{3}{2}\lim_{t\to0+}\left(4 - \sqrt[3]{t^2}\right) = 6.$$

(d) A $(0, 1]$ intervallumon $\ln x$ egy primitív függvénye $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$, ezért

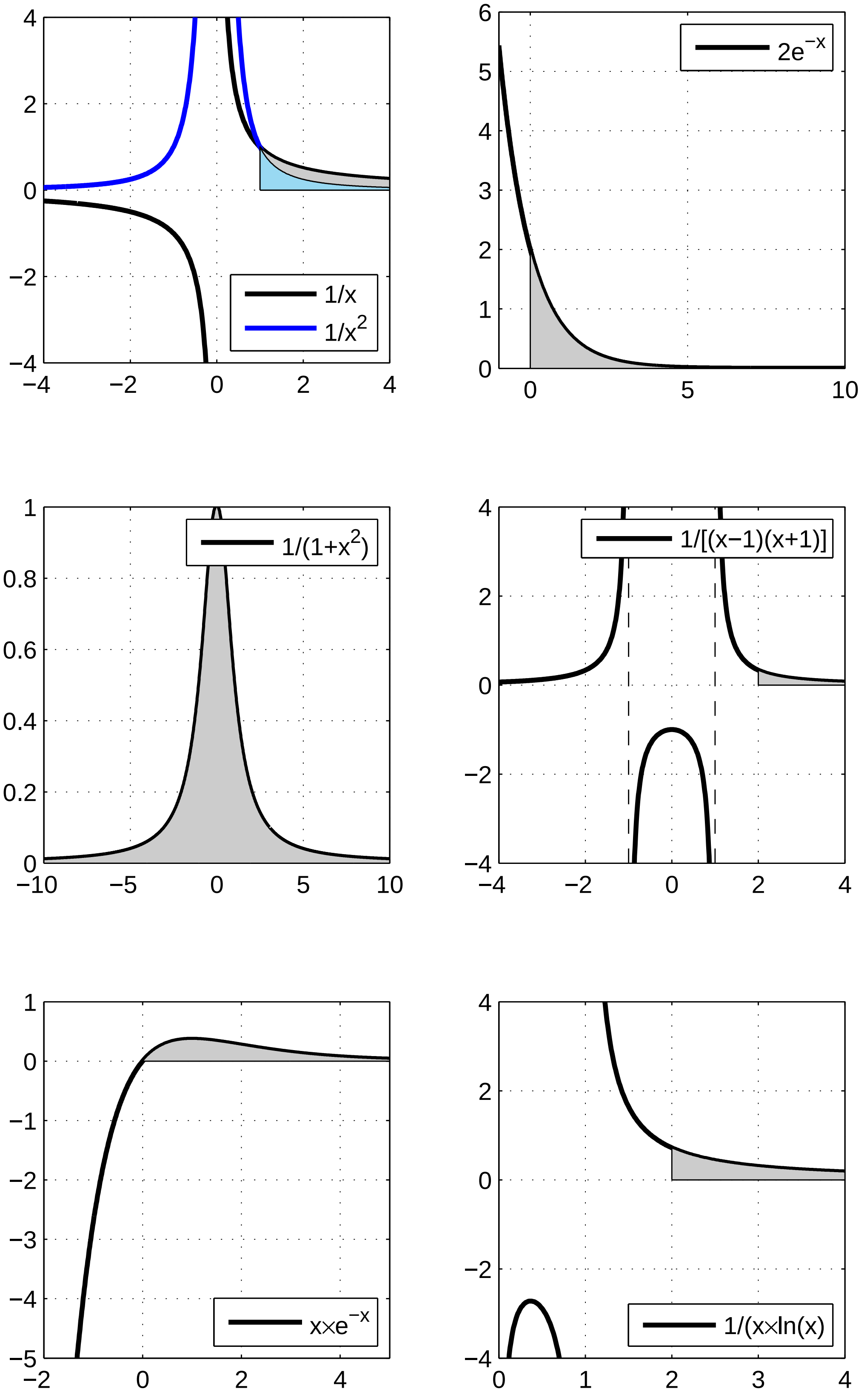
$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}\int_t^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}\left[x\ln x - x\right]_t^1 = \lim_{t\to0+0}[(1\ln 1 - 1) - (t\ln t - t)] = 1.$$

(e) A $[-2, 1)$ intervallumon $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -2(1-x)^{1/2},$$

ezért

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to1-0}\left[-2(1-x)^{1/2}\right]_{-2}^t = \lim_{t\to1-0}(-2(1-t)^{1/2}) - (-2(1-(-2))^{1/2}) = 2\sqrt{3}.$$



1. ábra. 3. gyakorlat/1. feladat

3. Milyen valós α-ra lesznek konvergensek az alábbi improprius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$\text{(a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. (a) A $\alpha \neq 1$ esetén $\dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ egy primitív függvénye $\dfrac{1}{x^\alpha}$-nak a $(0,+\infty)$ intervallumon, ezért

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor egy primitív függvény $\ln x$, így

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha > 1$ esetén lesznek konvergensek.

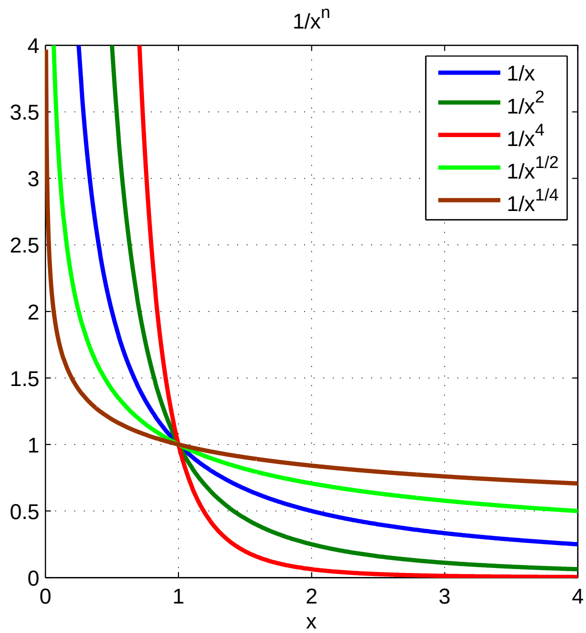
(b) Az (a) esethez hasonlóan $\alpha \neq 1$-re:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_t^1 = \lim_{t\to0+0}\left[\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{ha } \alpha < 1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}[\ln x]_t^1 = \lim_{t\to0+0}(-\ln t) = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha < 1$ esetén lesznek konvergensek.



2. ábra. 3. gyakorlat/3. feladat

4. gyakorlat

A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az $S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ tagokból álló (S_k), ún. részletösszeg-sorozat konvergens. Ebben az esetben ezt a határértéket a sor összegének nevezzük.

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Megoldás. (a) $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, ezért a sor divergens.

(b) Itt $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}$, azaz $S_n = 1$, ha n páros, illetve $S_n = 0$, ha n páratlan, ezért az (S_n) sorozatnak nincs határértéke, tehát a sor divergens.

(c) Végül

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}},$$

ami $n \to \infty$ esetén 2-höz tart, vagyis a sor konvergens és az összege 2.

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk is meg az összegüket.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q| < 1) \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Megoldás. A sor konvergenciájához azt kell megmutatni, hogy a részletösszegek sorozata konvergens. A sor összegét akkor tudjuk megmondani, ha a részletösszeg-sorozat határértéke ismert.

(a)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q} \quad \text{ha } n \to \infty,$$

vagyis a sor konvergens és összege $\dfrac{1}{1-q}$.

(b)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \quad \text{ha } n \to \infty,$$

a sor összege tehát 1.

(c)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{3(n-1)+1} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \to \frac{1}{3},$$

ha $n \to \infty$, azaz a sor konvergens és összege $1/3$.

3. Mutassuk meg, hogy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor.

Megoldás. Mivel $\sum 1/n^2$ pozitív tagú sor, ezért a részletösszegek sorozata monoton növő. A konvergenciához elég belátni, hogy (S_n) felülről korlátos. Az előző feladat (b) része szerint

$$S_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{n \cdot n} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

azaz a sor valóban konvergens. (A konvergencia tényén kívül azonban az összeg értékét nem tudtuk megállapítani.) A $\sum 1/n$ sor divergenciájához azt mutatjuk meg, hogy a részletösszegek sorozata nem korlátos. Tekintsük a 2-hatvány indexű részsorozatot:

$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-2}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty,$$

vagyis a monoton növő (S_n) sorozatnak van egy végtelenhez tartó részsorozata, így $S_n \to \infty$ szintén, tehát a sor divergens.

4. Állapítsuk meg gyök- vagy hányadoskritériummal, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \qquad \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \qquad \text{(f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1000+k}{2k+1}$$

Megoldás.

(a)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1} \to 0 < 1,$$

a sor konvergens.

(b)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \to \frac{1}{4} < 1,$$

tehát a sor konvergens.

(c)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \approx 0,37 < 1,$$

tehát a sor konvergens.

(d)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} \approx 0,74 < 1,$$

a sor konvergens.

(e)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} \approx 1,10 > 1,$$

a sor tehát divergens.

(f)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \frac{1000+k}{2k+1}}{\prod_{k=0}^{n} \frac{1000+k}{2k+1}} = \frac{1000+n+1}{2(n+1)+1} \to \frac{1}{2} < 1,$$

a sor tehát konvergens.

Noha a gyökkritérium erősebb, mégis érdemesebb a számolást a hányadoskritériummal kezdeni, mert sok esetben könnyen lehet egyszerűsíteni. Az itt szereplő feladatok gyökkritériummal is kijönnek, ám ehhez tudni kell bizonyos sorozatok határértékeit. Például az (a) feladatra a gyökkritériummal oda jutnánk, hogy a $\sqrt[n]{n!}$ sorozat határértékét kellene tudnunk (amit egyébként tudhatunk is: ez $+\infty$), a (c), (d) és (e) feladatoknál pedig az $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat határértéke jön elő (amiről belátható, hogy $1/e$-vel egyenlő).

5. Állapítsuk meg az összehasonlító kritériumok alapján, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$$

Megoldás. (a) Mivel $n+(-1)^n \leq n+1$, ezért $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \geq \dfrac{1}{n+1}$, továbbá a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(b)

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{4},$$

ahol az $1/4$ helyére akár $1/e$-t is írhattunk volna. Itt $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(c)

$$\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n+1},$$

továbbá $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(d) Itt $\sqrt{n} \geq 2$, ha $n \geq 4$, azaz az első három tag kivételével a sort felülről lehet becsülni a konvergens $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorral, tehát az eredeti sor is konvergens.

5. gyakorlat

Ha (a_n) egy adott számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám, akkor az

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük. Azon x pontok halmazát, ahol a fenti sor konvergens, a hatványsor konvergenciahalmazának hívjuk. Például $x = x_0$ esetén a fenti sor biztosan konvergál (hiszen az összegben az első kivételével minden tag nulla). Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú, R sugarú intervallum. Ha létezik a $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor ez a sugár az

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

képlettel számolható. Ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R-re egy hasonló képlet.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy végtelen sokszor differenciálható függvény, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

hatványsort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. Előadáson szerepel néhány nevezetes ($x_0 = 0$-hoz tartozó) Taylor-sor, ezek a következők:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots
\end{aligned}$$

ahol a fenti Taylor-sorok egész $\mathbb{R}$-en konvergensek (és ott elő is állítják a függvényeket), míg az alábbi sor-előállítás csak a $(-1, 1]$ intervallumon érvényes:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ezeken kívül még érdemes ismerni a mértani sor összegét is:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad \text{ahol } x \in (-1, 1).$$

1. Állítsuk elő deriválással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

   Megoldás. (a) Ismeretes, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén

   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

   Hatványsort a konvergenciaintervallum belsejében lehet tagonként deriválni, így

   $$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$

(b) Mivel minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

ezért x helyébe $-x$-et írva

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

teljesül minden $x \in (-1,1)$ esetén. Továbbá, ha x helyébe x^2-et helyettesítünk, akkor

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

A kérdéses függvény az $\dfrac{1}{1+x^2}$ függvény deriváltja, így

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(x^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (2n) x^{2n-1}.$$

2. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

   (a) $H = (-1,1)$, $\quad f(x) = \ln(1+x)$,

   (b) $H = (-1,1)$, $\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Megoldás. (a) Az előző feladatban láttuk, hogy $t \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

A konvergencia-intervallum belsejében hatványsort tagonként integrálhatunk. Így $t \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.\end{aligned}$$

(b) Ugyancsak láttuk, hogy $t \in (-1,1)$ esetén $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$. Az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény az $\dfrac{1}{1+x^2}$ függvény integrálja, így

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

3. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát!

$$\text{(a)}\quad \sin x^2 \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{(c)}\quad e^{-x} \qquad \text{(d)}\quad xe^{-x} \qquad \text{(e)}\quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

Megoldás. Felhasználjuk a már ismert Taylor sorokat, majd az egyértelműséget használjuk, azaz: ha egy $(-R,R)$ intervallumban $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, akkor a jobb oldalon álló hatványsor az f függvény 0 közepű Taylor sora.

(a) A sin függvény 0 középpontú hatványsorában x helyébe x^2-et írva

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

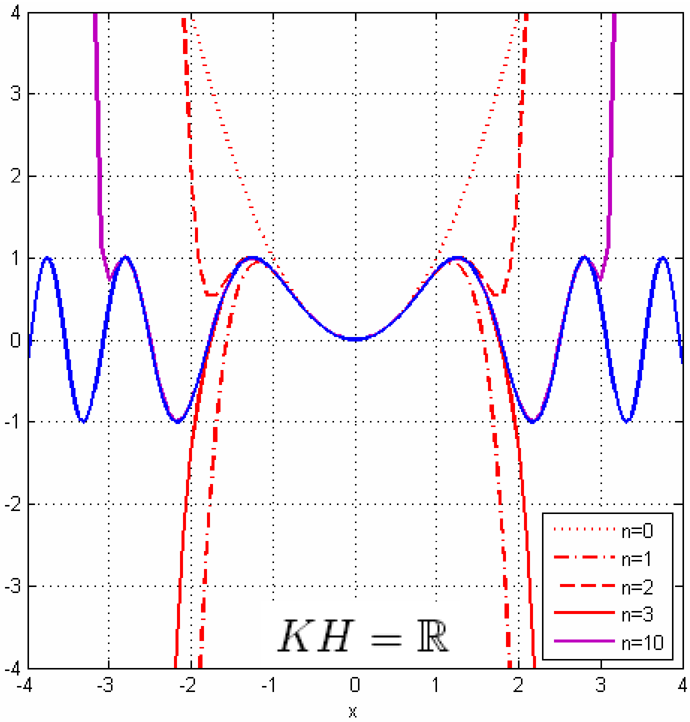
adódik.

(b) A $(-1,1)$ intervallumon $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Most x helyébe $-x^2$-et írva $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

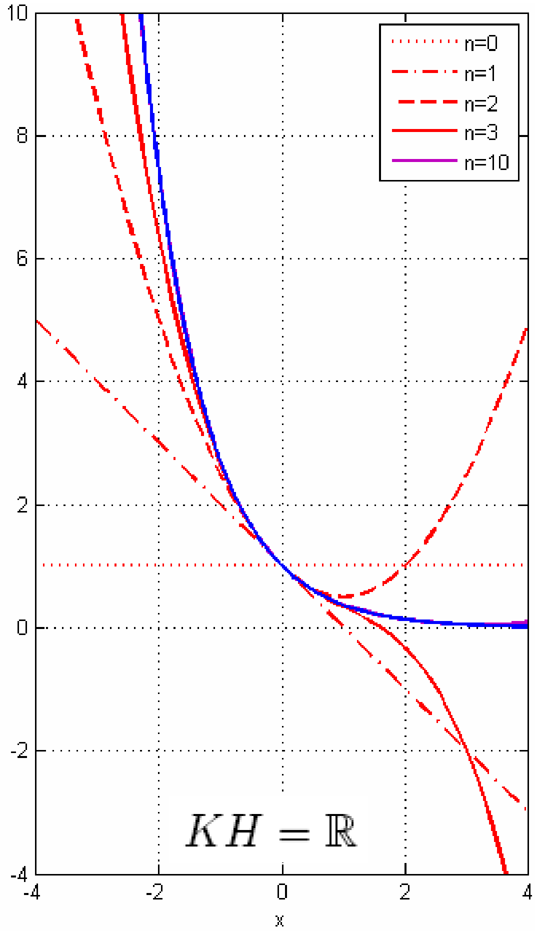
(c) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, ezért $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

TAYLOR-SOROK

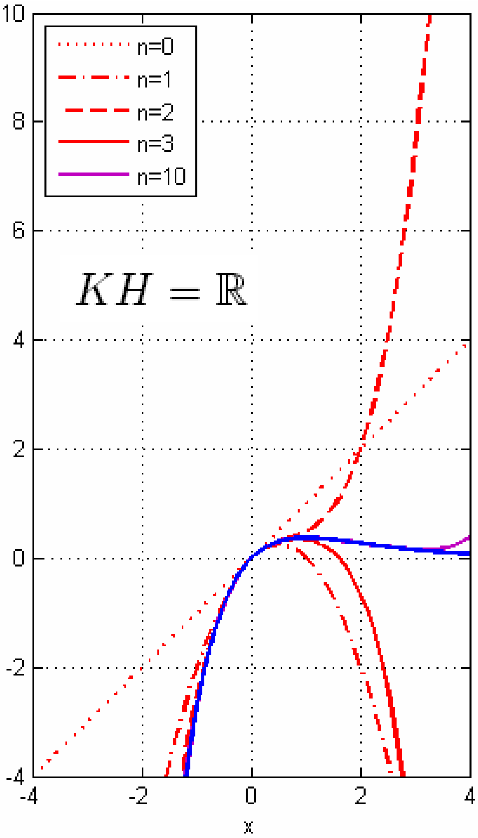
$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$



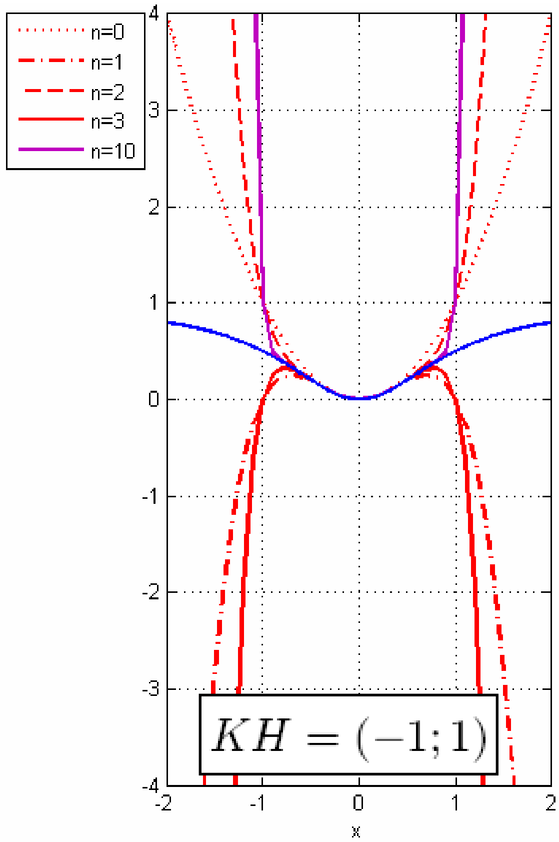
$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$



$$xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \ldots$$



$$\frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots$$



(d) $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, így $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$.

(e) A $(-1,1)$ intervallumon $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, ezért $\frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2}$.

4. Írjuk fel az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát!

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{1-4x^2} \qquad \text{(b)} \quad \operatorname{arc\,tg} x$$

Megoldás. (a) A mértani sor $(-1,1)$-en érvényes előállításából kiindulva

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{1-(2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((2x)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n},$$

ahol $\left|(2x)^2\right| < 1$, azaz $|x| < 1/2$ esetén érvényes a formula.

(b) Korábban előállítottuk ezt a függvényt hatványsor alakjában a $(-1,1)$ intervallumon, így ezen a halmazon a Taylor-sor egyértelműsége miatt a függvény Taylor-sora is ez lesz.

Ha nem jut eszünkbe a módszer, amivel kiszámoltuk ezeket a Taylor-sorokat, kiindulhatunk a definícióból is, azaz számoljuk ki a megadott függvények deriváltjait és írjuk fel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sort.

A következő feladathoz hasznos lesz az ún. Lagrange-maradéktagos Taylor-formula: ha f az $[a,x]$ intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható, akkor létezik olyan $\xi \in (a,x)$ szám, melyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

vagyis f felírható $f = T_n + R_n$ alakban, ahol T_n az (a ponthoz tartozó) n-edik Taylor-polinom, R_n pedig a maradéktag.

5. (a) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon e^x kiszámításához az

$$\text{(i)} \quad e^x \approx 1 + x, \qquad \text{(ii)} \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

közelítő képleteket használjuk?

(b) i. Miért mondják azt, hogy „kis x esetén $\sin x \approx x$”? Határozzuk meg azt az I intervallumot, melyre érvényes, hogy $x \in I$ esetén $|\sin x - x| \le 0,01$!

ii. Mutassuk meg, hogy ha az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

közelítő képletet használjuk, akkor legfeljebb $0,005$ hibát követünk el! Ellenőrizzük ezt például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén!

Megoldás. (a) A két polinom az e^x függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó első-, illetve másodfokú Taylor-polinomja. A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula alapján

$$|e^x - (1+x)| = \frac{\left|e^\xi\right|}{2!}|x|^2 \le \frac{1,65}{2!}\frac{1}{4} = 0,2063; \quad \text{illetve} \quad \left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right| = \frac{|e^\eta|}{3!}|x|^3 \le \frac{1,65}{3!}\frac{1}{8} = 0,0344;$$

ahol ξ, η valamilyen 0 és x közötti számok. Mivel most $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, ezért $|x|$ felülről becsülhető $\frac{1}{2}$-del.

(b) Az $f(x) = \sin x$ függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó első-, sőt a másodfokú Taylor-polinomja is a $T_2(x) = x$ függvény. Nekünk az kell most, hogy

$$|\sin x - x| = |\sin x - T_2(x)| = \left|\frac{\left(\sin^{(3)}\right)(\xi)}{3!}x^3\right| \le \frac{1}{6}|x|^3 < 0,01$$

legyen. Ebből azt kapjuk, hogy $|x| \le 0,3914$, azaz a $[-0.3914, 0.3914]$ intervallumban a $\sin x \approx x$ közelítéssel legfeljebb $0,01$-ot tévedünk.

Ha most az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vagyunk és a megadott polinomot használjuk, ami a hatodfokú Taylor-polinomja a szinuszfüggvénynek a nulla körül, akkor

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| = |\sin x - T_6(x)| = \left|\frac{\left(\sin^{(7)}\right)(\xi)}{7!}x^7\right| \leq \frac{1}{7!}|x|^7 \leq \frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \approx 0,00468 < 0,005.$$

Például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén tudjuk, hogy $\sin\frac{\pi}{6} = 0,5$. A fenti közelítő képletet használva 16 tizedesjegy pontossággal

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 6^3} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^5} = 0.500002132588792 \approx 0.5,$$

ami jóval a kiszámolt hibahatáron belül van.

6. Írjuk fel 0 középű hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!

Megoldás. Korábban láttuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$, ezért az egyenlőség fennáll, ha x helyébe $-x^2$-et írunk: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$. Egy primitív függvény meghatározásához nem kell mást tenni, mint tagonként integrálni a hatványsort.

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}.$$

6. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0, 2\pi]$ intervallumot is, ekkor a fenti definíciók értelemszerűen módosulnának). A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

Ha az f függvény páros, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $t \mapsto f(t)\sin nt$ függvény páratlan, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon 0 az integrálja, ezért a Fourier-sorában a b_n együtthatók mindegyike 0. Ha az f függvény páratlan, akkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $t \mapsto f(t)\cos nt$ páratlan függvény, ezért a Fourier-sorában az a_n együtthatók mindegyike 0.

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!

   (a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

   Megoldás. A függvény Fourier-sora az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, és minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ esetén előállítja a függvényt. A Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos nt}{n}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n}.$$

   Így a Fourier-sor:

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt a Fourier-sor, és tiszta szinuszos-sor, mert a függvény páratlan (azaz $a_n = 0$). A (b_n) együtthatók:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \; \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin nt \; \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi - t}{2}\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos nt}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

A Fourier-sor:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

(c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. f páros függvény, így minden $n \in \mathbb{N}$-re $b_n = 0$. A többi Fourier-együttható:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n} \; \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 - \left[-\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}
\end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

(d) $f(x) = (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. A Fourier-sor tiszta koszinuszos-sor (azaz $b_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén) lesz, ugyanis f páros függvény. Az a_n együtthatók:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2 \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2\cos nt \; \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - t)^2\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2(\pi - t)\frac{\sin nt}{n} \; \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[-2(\pi - t)\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\cos nt}{n^2} \; \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

Így a Fourier-sor:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx.$$

FOURIER-SOROK