2. ÖSSZEFOGLALÁS

Kalkulus 2. gyakorlat
Fizika BSc I.

- Parciális deriváltak
  - elemi függvények deriváltjai, deriválási szabályok...
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Jacobi-mátrixa:

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 & \cdots \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 & \cdots \partial_n f_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_k & \partial_2 f_k & \partial_3 f_k & \cdots \partial_n f_k \end{pmatrix}$$

  - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Hesse-mátrixa:

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial^2_{11} f & \partial^2_{21} f \\ \partial^2_{12} f & \partial^2_{22} f \end{pmatrix}$$

- Szélsőérték számítása ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in intD(f)$)
  - szükséges feltétel: $f'(a) = 0$
  - ha $f''(a)$ pozitív definit $\Rightarrow$ lokális minimum a-ban
    ha $f''(a)$ negatív definit $\Rightarrow$ lokális maximum a-ban
    ha $f''(a)$ indefinit $\Rightarrow$ nincs lokális szélsőérték a-ban

  1. stacionárius helyek meghatározása: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
  2. $f''(x, y)$ a stacionárius helyeken: $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$
  3. ha $D > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ (f'' pozitív definit) $\Rightarrow$ lokális minimum
     ha $D > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ (f'' negatív definit) $\Rightarrow$ lokális maximum
     ha $D < 0$ (f'' indefinit) $\Rightarrow$ nincs lokális szélsőérték
     ha $D = 0 \Rightarrow$ további vizsgálat szükséges
  4. szélsőértékek kiszámítása

- Ívhossz
  - Legyen $\varphi : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe.
    $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\|\dot{\varphi}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$
    A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\| \ \mathrm{d}t$
  - Egy $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe esetén:
    $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$
    $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\dot{t})^2 + (\dot{f}(t))^2} \ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2} \ \mathrm{d}t$

- Primitív függvény
  - Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f egy primitív függvényén egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, n$-re.
    $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esetben $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 \Rightarrow F(x, y) = \int f_1(x, y) \ \mathrm{d}x + c(y)$
    $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(\int f_1(x,y) \ \mathrm{d}x + c(y))}{\partial y} = f_2(x, y) \Rightarrow c(y)$ meghatározható

- Vonalintegrál
  - f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálja: $\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle \; \mathrm{d}t$
  - f-nak akkor létezik primitív függvénye, ha az $f' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus
  - Ha f-nek létezik F primitív függvénye: $\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ (F: f potenciálfüggvénye)
  - Ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén f vonalintegrálja φ mentén 0

- Többváltozós integrál kiszámítása
  - Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának (alatta lévő térfogat) kiszámítása téglalapon $\to$ lebontási tétel (Fubini-tétel):
    Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a,b] \times [c,d]$.
    $$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \; \mathrm{d}y \right) \; \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \; \mathrm{d}x \right) \; \mathrm{d}y$$
  - Olyan síkidomon, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak:
    Ha $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $N_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \; \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$ halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük.
    $$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \; \mathrm{d}y \right) \; \mathrm{d}x$$
    Hasonló az állítás N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.
  - Általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (pl. egy körön):
    Ha $\exists T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $\Phi : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor
    $$\int_Q f = \int_T f(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) \left|\det(\Phi'(u,v))\right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$
    Origó középpontú, R sugarú körön:
    $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le R^2\}$
    $T = [0,R] \times [0, 2\pi]$
    $(x,y) = \Phi = (r\cos\varphi, \; r\sin\varphi)$
    $$\det(\Phi'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$
    $$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi.$$

Sok sikert kívánok a dolgozathoz!
Haszpra Tímea