1. ÖSSZEFOGLALÁS

Kalkulus 2. gyakorlat
Fizika BSc I.

- Integrálás
  - parciális integrálás: $\int f'g = fg - \int fg'$
  - helyettesítéses integrálás: $x = g(t), \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ \mathrm{d}t$
  - racionális törtfüggvények integrálása:
    - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
    - $\int f^n(x)f'(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
    - ha a nevező$= (x-a)(x-b)\cdots \Rightarrow$ törtek összegére bontás $\Rightarrow$ $\ln|x-a| + \ln|x-b| + \ldots$
    - ha nincs zérushely: $\Rightarrow \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg}(\frac{x-a}{b}) \cdot b + C$
  - gyökös föggvények integrálása $\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C} \Rightarrow \sqrt{\pm\left(\frac{x\pm a}{b}\right)^2 \pm 1}\right)$:

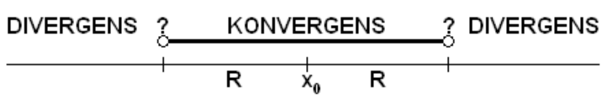
$$\begin{aligned}
\cos^2 t + \sin^2 t &= 1 & \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= 1 \\
\cos^2 t - \sin^2 t &= \cos 2t & \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t &= \operatorname{ch} 2t \\
\cos^2 t &= \frac{1}{2}(1+\cos 2t) & \operatorname{ch}^2 t &= \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2t) \\
\sin^2 t &= \frac{1}{2}(1-\cos 2t) & \operatorname{sh}^2 t &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t - 1)
\end{aligned}$$

    összefüggések segítségével, $\frac{x\pm a}{b} = \sin t, \cos t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel
  - improprius integrálok:
    - $f : [a,\infty) \to \mathbb{R} : \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$
    - $f : [a,b) \to \mathbb{R} : \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$

- Hatványsorok
  - konvergenciasugár:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{, ha a nevező véges és nem 0} \\ 0 & \text{, ha a nevező } \infty \\ \infty & \text{, ha a nevező 0} \end{cases}$$

  - a konvergencia-intervallum végpontjait külön meg kell nézni!



  - fontos határértékek: $\sqrt[n]{a} \to 1,\ \sqrt[n]{n} \to 1,\ \sqrt[n]{n!} \to \infty$
  - Leibniz-típusú sorok: $\sum (-1)^{n+1} a_n$ alakú sor, ahol $a_{n+1} \leq a_n$
    Egy Leibniz-típusú sor pontosan akkor konvergens, amikor $\lim a_n = 0$.

- Taylor-sorok
  - x_0 középpű Taylor-sor: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
  - nevezetes Taylor-sorok:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots && KH = \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots && KH = \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots && KH = \mathbb{R} \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots && KH = \mathbb{R} \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots && KH = \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots && KH = (-1, 1] \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots && KH = (-1, 1)
\end{aligned}
$$

- Fourier-sorok
  - Az f függvény Fourier-sora a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))
$$

$$
a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \ \mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, 2 \dots)
$$

$$
b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \ \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \dots)
$$

  - ha f páros $\Rightarrow f(t)\sin(nt)$ páratlan $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$
    ha f páratlan $\Rightarrow f(t)\cos(nt)$ páratlan $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

Sok sikert kívánok a dolgozathoz!
Haszpra Tímea