Kalkulus II.

9. gyakorlat

Primitív függvény

- Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f egy primitív függvényén egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$-re.
  $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esetben $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f_1 \Rightarrow F(x, y) = \displaystyle\int f_1(x, y)\ \mathrm{d}x + c(y)$
  $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial(\int f_1(x, y)\ \mathrm{d}x + c(y))}{\partial y} = f_2(x, y) \Rightarrow c(y)$ meghatározható
  Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik.

Ívhossz

- Legyen $\varphi : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe.
  $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\|\dot{\varphi}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$
  A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\|\ \mathrm{d}t$
- $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe esetén:
  $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$
  $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\dot{t})^2 + (\dot{f}(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot{f}(t))^2}\ \mathrm{d}t$

Vonalintegrál

- Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a, b]) \subset \Omega$. f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálja: $\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)\rangle\ \mathrm{d}t$
- f-nak akkor létezik primitív függvénye, ha az $f' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus
- Ha f-nek létezik F primitív függvénye: $\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ (F f potenciálfüggvénye)
- Ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén f vonalintegrálja φ mentén 0

---

1. Számítsuk ki az $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3}$ függény grafikonjának ívhosszát.
2. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.
3. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.
4. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

   (a) $f(x, y) = (x,\ y)$ (b) $f(x, y) = \left(x^2 + xy^2,\ x^2y + y^3\right)$ (c) $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2},\ \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x, y) = (-y,\ x)$.
6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1, 0)$ és $(1, 2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x, y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$.
7. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x, y) = (x + y,\ x + y)$.
8. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és

   $$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$