Kalkulus II.

6. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort **trigonometrikus sor**nak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0, 2\pi]$ intervallumot is, ekkor a fenti definíciók értelemszerűen módosulnának). A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény **Fourier-sor**ának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

Ha f páros $\Rightarrow f(t)\sin(nt)$ páratlan $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$
Ha f páratlan $\Rightarrow f(t)\cos(nt)$ páratlan $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!
   (a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$
   (b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$
   (c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$
   (d) $f(x) = \big(\pi - |x|\big)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$