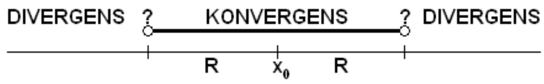
Kalkulus II.

5. gyakorlat

Ha (a_n) egy adott számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám, akkor az $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ függvénysort **hatványsor**nak nevezzük. Azon x pontok halmazát, ahol a fenti sor konvergens, a hatványsor **konvergenciahalmaz**ának hívjuk. Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú, R sugarú intervallum. Ha létezik a $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor ez a sugár az

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$



képlettel számolható. Ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R-re egy hasonló képlet. A konvergencia-intervallum végpontjairól a tétel semmit sem mond, így ott egy hatványsor lehet konvergens, illetve divergens is.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy végtelen sokszor differenciálható függvény, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

hatványsort az f függvény x_0 ponthoz tartozó **Taylor-sor**ának nevezzük.
Néhány nevezetes ($x_0 = 0$-hoz tartozó) Taylor-sor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \qquad KH = \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \qquad KH = \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \qquad KH = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \qquad KH = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \qquad KH = \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad KH = (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad KH = (-1, 1)$$

1. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

$$\sum nx^n$$

$$\sum \frac{1}{n}x^n$$

$$\sum \frac{2^n}{n^2}x^n$$

$$\sum \frac{2^n}{n!}x^n$$

$$\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

$$\sum \frac{1}{n!}x^n$$

$\sum n!x^n$

$\sum x^n$

$\sum \frac{1}{n^2}x^n$

2. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \ln(1 + x)$,
   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

3. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a konvergenciahalmaz?

   $\sin x^2$

   $\frac{1}{1+x^2}$

   e^{-x}

   xe^{-x}

   $\frac{x^2}{1+x^2}$

4. Írjuk fel az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát!

   $\frac{1}{1-4x^2}$

   $\operatorname{arc\,tg} x$

A következő feladathoz hasznos lesz az ún. Lagrange-maradéktagos Taylor-formula: ha f az $[a, x]$ intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható, akkor létezik olyan $\xi \in (a, x)$ szám, melyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

vagyis f felírható $f = T_n + R_n$ alakban, ahol T_n az (a ponthoz tartozó) n-edik Taylor-polinom, R_n pedig a maradéktag.

5. (a) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon e^x kiszámításához az

   $$\text{(i)} \quad e^x \approx 1 + x, \qquad \text{(ii)} \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

   közelítő képleteket használjuk?

   (b) i. Miért mondják azt, hogy „kis x esetén $\sin x \approx x$"? Határozzuk meg azt az I intervallumot, melyre érvényes, hogy $x \in I$ esetén $|\sin x - x| \leq 0,01$!

   ii. Mutassuk meg, hogy ha az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a

   $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

   közelítő képletet használjuk, akkor legfeljebb $0,005$ hibát követünk el! Ellenőrizzük ezt például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén!

6. Írjuk fel 0 közepű hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!