Kalkulus II.

4. gyakorlat

A $\sum a_k$ sor **konvergens**, ha az $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ tagokból álló (S_n), ún. részletösszeg-sorozat konvergens. Ebben az esetben ezt a határértéket a sor összegének nevezzük: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$.

[Emlékeztető (sorozatok)

- **Sorozat határértéke.** Az (a_n) sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$-ra $|a_n - a| < \varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallumba esnek.)
- **Nevezetes határértékek.**
  - Ha $|q| < 1$, akkor $q^n \to 0$.
  - Ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \to 1$. *c)* $\sqrt[n]{n} \to 1$. *d)* $\sqrt[n]{n!} \to \infty$
- **"Erősorrend".** $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ esetén: $n^k, a^n, n!, n^n$. $\Rightarrow$
  $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0, \quad \dfrac{a^n}{n!} \to 0, \quad \dfrac{n^k}{n!} \to 0, \quad \dfrac{n!}{n^n} \to 0.$
- **Módszer.** A nevezetes határértékek és a műveleti szabályok alkalmazásával számítjuk ki a határértékeket, nem a definíció alapján.]

Mértani sor: $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^n - 1}{q-1}$. Konvergens és $S_n = \frac{1}{1-q}$.

Kritériumok

- Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim a_n = 0$ (megfordítás nem igaz!).
- **Összehasonlító kritériumok:**
  (a_n), (b_n) olyan számsorozatok, hogy $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$: Ha $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ is konvergens.
  (a_n), (b_n) olyan számsorozatok, hogy $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \geq N_0$: Ha $\sum b_n$ divergens $\Rightarrow \sum a_n$ is divergens.
- **Hányados kritérium:** (pl. faktoriális kifejezésekhez)
$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} < 1: & \text{konvergens} \\ > 1: & \text{divergens} \\ = 1: & \text{konvergens vagy divergens} \end{cases}$$
- **Gyökkritérium:**
$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} < 1: & \text{konvergens} \\ > 1: & \text{divergens} \\ = 1: & \text{konvergens vagy divergens} \end{cases}$$

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?
$$\sum_{n=0}^{\infty} 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek. Mi a sorok összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (|q| < 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

3. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor.

4. Állapítsuk meg gyök- vagy hányadoskritériummal, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1000+k}{2k+1}$$

Noha a gyökkritérium erősebb, mégis érdemesebb a számolást a hányadoskritériummal kezdeni, mert sok esetben könnyen lehet egyszerűsíteni. Az itt szereplő feladatok gyökkritériummal is kijönnek, ám ehhez tudni kell bizonyos sorozatok határértékeit. Például az (a) feladatra a gyökkritériummal oda jutnánk, hogy a $\sqrt[n]{n!}$ sorozat határértékét kellene tudnunk (amit egyébként tudhatunk is: ez $+\infty$), a (c), (d) és (e) feladatoknál pedig az $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat határértéke jön elő (amiről belátható, hogy $1/e$-vel egyenlő).

5. Állapítsuk meg az összehasonlító kritériumok alapján, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$$