Kalkulus II.

11. gyakorlat

Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x,y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_Q f = \int_T f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \left|\det\big(g'(u,v)\big)\right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v,$$

ahol tehát a g leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű" integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha például egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq R^2\big\}$, $T = [0,R] \times [0,2\pi]$ és $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, \; r\sin\varphi)$. Ekkor

$$\det(g'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

és így

$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi.$$

---

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ a zárt egységkörlap a síkon!

   (a) $\displaystyle\int_D 1 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int_D x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (c) $\displaystyle\int_D y^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (d) $\displaystyle\int_D x^2 + y^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq 0\big\}$.

   (a) $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2+y^2} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int_D 6xy^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

3. Számítsuk ki az $x + y = 1, \; x + y = 2, \; y = 3x, \; y = 4x$ görbék által határolt síkidom területét!