Kalkulus II.

10. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

Fubini-tétel: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $N_x = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ \varphi(x) \leq y \leq$ halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!
   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$ ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;
   (b) $\displaystyle\int_D \sin y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$ ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;
   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$ ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z,$ ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$;
   (e) $\displaystyle\int_D \cos(x + z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z,$ ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

2. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
   (a) $f(x, y) = 1,\quad N_x := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, 1],\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\big\}$;
   (b) $f(x, y) = xy^2,\quad N_x := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\big\}$;
   (c) $f(x, y) = \sqrt{y},\quad N_x := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1, 1],\ 0 \leq y \leq (1 - x)^2\big\}$.

3. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.