

KALKULUS I. GYAKORLAT, MEGOLDÁSVÁZLATOK
FIZIKA BSC I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$,
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$,
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x + y < 1\}$,
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az \cup, \cap, \setminus halmazműveletek segítségével:

- (a) $E = \{x : x \in A \text{ és } (x \in B \text{ vagy } x \in C)\}$;
- (b) $F = \{x : (x \in A \text{ és } x \in B) \text{ vagy } x \in C\}$.

Megoldás. (a) $E = A \cap (B \cup C)$;

(b) $F = (A \cap B) \cup C$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

- (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;
- (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;
- (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Megoldás. (a) Nem igaz, legyen $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus A = \{2\} \neq B$.

(b) Nem igaz, legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus C = \{1\}$, de $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$.

(c) Igaz, ugyanis $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \iff x \in (A \cup B)$ és $x \notin (A \cap B) \iff$ vagy $x \in A$, vagy $x \in B \iff$ vagy $x \in (A \setminus B)$, vagy $x \in (B \setminus A) \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?

- (a) $(A \subset B \text{ és } A \subset C) \iff A \subset B \cup C$;
- (b) $(A \cup C = B \cup C \text{ és } A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

Megoldás. (a) A balról jobbra való következtetés természetesen igaz, ugyanakkor visszafelé nem, legyen például $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ és $A = \{2, 3, 4\}$. Ekkor $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \supset A$, de $A \not\subset B$ (és $A \not\subset C$).

(b) Itt a jobbról balra történő (\Leftarrow) következtetési irány teljesül nyilvánvaló módon, ugyanakkor a másik irány itt sem következik. Legyenek a halmazok olyanok, hogy nemüresek, $A, B \subset C$ és $A \cap B = \emptyset$. Ekkor mindkét feltétel teljesül, de $A \neq B$. Például $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ és $C = \{1, 2\}$.

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad (b) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Megoldás. $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ és $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. A másik állítás bizonyítása teljesen hasonló.

6. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását! Melyik igaz közülük, maga az állítás, vagy annak tagadása?

- (a) Minden alma érett.
- (b) Létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$ -ra $n > k$.
- (c) Minden p pozitív számhoz létezik $K > 0$, hogy minden $x > K$ esetén $x^2 - px + 1 > 0$.
- (d) Minden $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ számokhoz létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $p < r < q$.

Megoldás. (a) Van olyan alma, amely éretlen. (Az eredeti állítás tagadása igaz.)

(b) Minden $n \in \mathbb{N}$ -hez létezik olyan $k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$, hogy $n \leq k$. (Az eredeti állítás igaz, pl. $n = 1$ minden nempozitív egésznél nagyobb.)

(c) Van olyan p pozitív szám, hogy minden $K > 0$ -hoz létezik $x > K$, hogy $x^2 - px + 1 \leq 0$. (Az eredeti állítás igaz, mert a megadott függvény grafikonja p -től függetlenül egy „felfelé álló” parabola, vagyis ha nem metszi az x -tengelyt, akkor bármilyen K jó lesz, ha pedig metszi, akkor a nagyobbik gyöke (ami persze függ p -től) megfelelő K lesz.)

(d) Vannak olyan $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ számok, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén $r \leq p$ vagy $q \leq r$. (Az eredeti állítás igaz, ugyanis ha $r = (p + q)/2$, akkor r racionális szám és $p < r < q$.)

7. Legyenek P és Q kijelentések, ekkor a „ha P , akkor Q ” állítás tagadása a „ P és $\neg Q$ ”, a megfordítása pedig a „ha Q , akkor P ” állítás. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását és megfordítását is. Melyek lesznek igazak?

(a) Ha $x > 0$, akkor $x^2 - x > 0$.

(b) Ha p prímszám, akkor $p^2 + 1$ nem prímszám.

Megoldás. (a) Az állítás tagadása: (létezik x , hogy) $x > 0$ és $x^2 - x \leq 0$. Az állítás megfordítása: Ha $x^2 - x > 0$, akkor $x > 0$. Az eredeti állítás hamis, legyen pl. $x = 1$, ekkor $x > 0$, de $1^2 - 1 = 0 \not> 0$. A megfordítás is hamis, pl. ha $x = -2$, akkor $(-2)^2 - (-2) = 6 > 0$, de $-2 \not> 0$.

(b) Az állítás tagadása: (létezik p , hogy) p prímszám és $p^2 + 1$ is prímszám. Az állítás megfordítása: Ha $p^2 + 1$ nem prímszám, akkor p prímszám. Az eredeti állítás hamis, legyen pl. $p = 2$, ekkor p prím és $2^2 + 1 = 5$ is prím. A megfordítás sem igaz, ha ugyanis $p = 8$, akkor $8^2 + 1 = 65$ nem prímszám, de $p = 8$ sem az.

2. gyakorlat

1. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

Megoldás. $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$. $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$.

2. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

Megoldás.

$$(a) \quad f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 1 \quad (f \circ g)(x) = (x + 1)^2$$

$$(b) \quad f(x) = x - 4 \quad g(x) = x + 4 \quad (f \circ g)(x) = x$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = x^2 \quad (f \circ g)(x) = |x|$$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív (szürjektív), akkor $f + g$ is injektív (szürjektív)?

Megoldás. Egyik sem igaz. Legyen $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Mindkettő injektív és szürjektív is, de $(f + g)(x) = 0$, ami se nem injektív, se nem szürjektív.

4. Mely függvények injektívek, illetve szürjektívek? Amelyek bijektívek is, azoknak adjuk meg az inverzét!

$$(a) \quad f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$(b) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3;$$

$$(c) \quad h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \frac{1}{x};$$

$$(d) \quad k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k(x) = \frac{1}{x}.$$

Megoldás. (a) Ha $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$, akkor $1 - x^2 = 1 - y^2 \iff x^2 = y^2$, amiből következik, hogy $x = y$ (hiszen csak a $[0, 1]$ -en vagyunk). Tehát f injektív, de $R(f) = [0, 1]$, így nem szürjektív. Viszont ha f -et, mint $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvényként tekintjük, akkor már szürjektív is (az $y = f(x)$ egyenlet minden $y \in R(f)$ -re megoldható, az injektivitás miatt egyértelműen), így van inverz. Az $y = \sqrt{1 - x^2}$ egyenletből $x = \sqrt{1 - y^2}$, azaz $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (A függvény inverze önmaga.)

(b) A függvény injektív ($x^3 = y^3 \iff x = y$) és szürjektív is (minden $y \in \mathbb{R}$ -re létezik x , hogy $x^3 = y$, nevezetesen $x := \sqrt[3]{y}$), azaz van az egész számegyenesen értelmezett inverze. A $y = x^3$ -ből x és y szerepét felcserélve, majd y -t kifejezve kapjuk, hogy $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(c) A függvény injektív, tegyük fel ugyanis, hogy $h(x) = h(y)$, azaz $x - 1/x = y - 1/y \iff \frac{x^2-1}{x} = \frac{y^2-1}{y} \iff (x-y)(xy+1) = 0$. Ez a h értelmezési tartományán csak úgy lehet, hogy $x = y$. A függvény szürjektív is, mert minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $y = h(x)$ egyenlet megoldható, hiszen $y = x - 1/x \iff x^2 - xy - 1 = 0$. Ebből $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$, vagyis mindig két gyök van és itt pontosan az egyik gyök lesz az értelmezési tartomány eleme. Az inverz itt is az $x = h(y)$ egyenletből számolható, y -t kifejezve: $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

(d) A függvény injektív, ugyanis $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ -ből $x = y$ következik. Szürjektív is, ugyanis minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ -hoz van olyan $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy $a = \frac{1}{x}$, éspedig $x = \frac{1}{a}$. Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletből x -et kifejezve: $x = \frac{1}{y}$, vagyis k inverze önmaga.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4, 9])$, $f^{-1}([-1, 0])$, $f^{-1}([-2, -1])$ halmazokat, ha

- (a) $f(x) = x^2$;
- (b) $f(x) = \sin x$.

Megoldás. (a) $f^{-1}([4, 9]) = [-3, -2] \cup [2, 3]$, $f^{-1}([-1, 0]) = \{0\}$, $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$.

(b) $f^{-1}([4, 9]) = \emptyset$, $f^{-1}([-1, 0]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $f^{-1}([-2, -1]) = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.

- (a) Mutassuk meg, hogy
 - i. $A \subset f^{-1}(f(A))$;
 - ii. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

Megoldás. (a) Legyen $x \in A$, ekkor az ősképf definíciója szerint $x \in f^{-1}(f(A))$, hiszen $f(x) \in f(A)$. Itt általában a két halmaz nem egyenlő, pl. az előző feladatbeli $f(x) = x^2$ függvény és $A = [2, 3]$ halmaz esetén $f(A) = [4, 9]$, $f^{-1}(f(A)) = [-3, -2] \cup [2, 3] \neq [2, 3]$.

(b) Ha $x \in f(f^{-1}(B))$, akkor van olyan $y \in f^{-1}(B)$, hogy $f(y) = x$. Másrészt $y \in f^{-1}(B)$ azt jelenti, hogy $f(y) \in B$, azaz $x \in B$. Általában itt sincs egyenlőség: ha $f(x) = x^2$ és $B = [-1, 0]$, akkor $f^{-1}(B) = \{0\}$, $f(f^{-1}(B)) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [-1, 0]$.

3. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

Megoldás.

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \log_6 6 = 1, \quad \log_6 6^6 = 6, \quad 2^{\log_2 3} = 3, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{-2010\pi}{4} = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{sgn} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} = -1, \quad \operatorname{sgn} \operatorname{sgn} \cos \sqrt{2010}\pi = -1.$$

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x \mapsto 2x - 5, \quad x \mapsto 6 - x, \quad x \mapsto x^2 - 3, \quad x \mapsto (x - 3)^2, \quad x \mapsto 6x - x^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(6x - x^2),$$

$$x \mapsto \frac{1}{x + 3}, \quad x \mapsto \frac{-2x - 11}{x + 3}, \quad x \mapsto 2^x, \quad x \mapsto 2^{1-x}, \quad x \mapsto \log_3 |x|, \quad x \mapsto 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1,$$

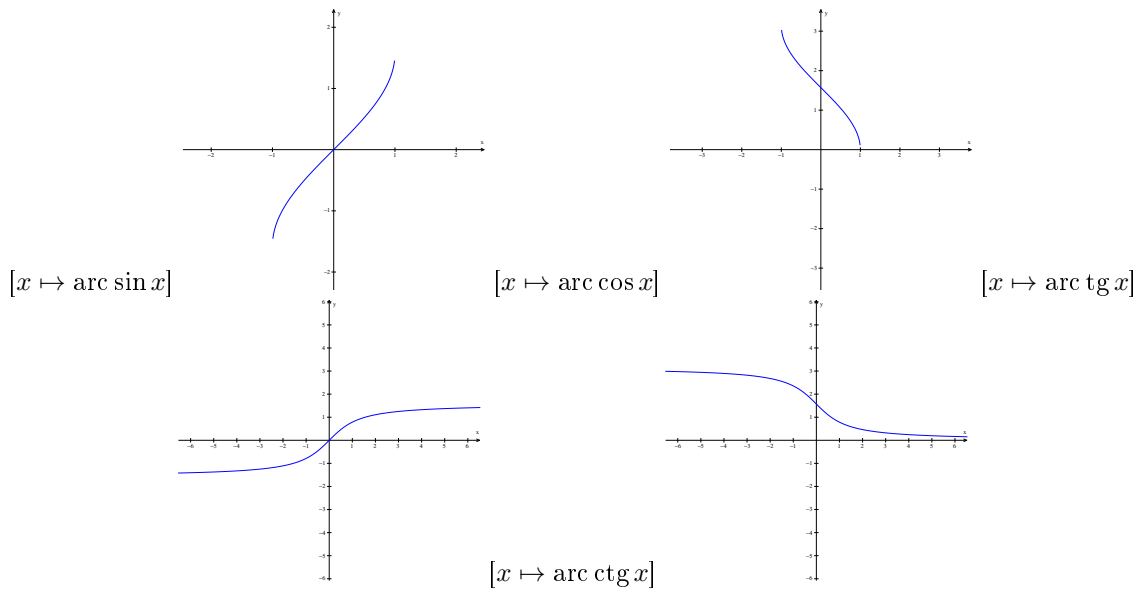
$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos 2x, \quad x \mapsto 2 \cos \frac{x}{2} - 2, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto 2 \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) + 4, \quad x \mapsto |\cos |x||.$$

3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékészlet?

$$\arcsin x = \left(\sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}(x), \quad \arccos x = \left(\cos \Big|_{[0, \pi]} \right)^{-1}(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}(x), \quad \operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} \Big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}(x).$$

Megoldás.



4. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$(a) (1+i)(3-2i) =? \quad (b) (i-2)(5-3i) =? \quad (c) (1+\sqrt{3}i)^3 =? \\ (d) 1/i =? \quad (e) (1+i)/(3-2i) =? \quad (f) (5+i)/(1+i) =?$$

Megoldás. (a) $(1+i)(3-2i) = 3-2i+3i+2 = 5+i$;
 (b) $(i-2)(5-3i) = 5i+3-10+6i = -7+11i$;
 (c) $(1+\sqrt{3}i)^3 = (1+\sqrt{3}i)^2(1+\sqrt{3}i) = (1-3+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 2(\sqrt{3}i-1)(1+\sqrt{3}i) = -8$;
 (d) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$;
 (e) $\frac{1+i}{3-2i} = \frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{1+5i}{13}$;
 (f) $\frac{5+i}{1+i} = \frac{5+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(5+i)(1-i)}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$.

2. Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$.

Megoldás. A $(c+di)^2 = c^2-d^2+2cdi = 20i-21$ egyenlőség akkor áll fenn, ha a valós és képzetes részek megegyeznek, azaz $c^2-d^2 = -21$ és $2cd = 20$. Az ezekből kapott másodfokú egyenletet megoldva $c=2, d=5$, illetve $c=-2, d=-5$ megoldásokat kapjuk.

3. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:

$$(a) 1+i, \quad (b) 1-i, \quad (c) \sqrt{3}+i, \quad (d) -1-\sqrt{3}i.$$

Megoldás.

$$(a) 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ (b) 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), \\ (c) \sqrt{3}+i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \\ (d) -1-\sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$$

4. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$(a) (1+i)^5 =? \quad (b) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2010} =?$$

Megoldás. (a) $(1+i)^5 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^5 = \sqrt{32} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -4 - 4i;$

(b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2010} = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)^{2010} = \left(\cos \frac{8040\pi}{3} + i \sin \frac{8040\pi}{3} \right) = \left(\cos 2680\pi + i \sin 2680\pi \right) = 1.$

5. Oldjuk meg az $x^3 = 1$, $x^4 = -4$ és az $x^6 = 1$ egyenleteket!

Megoldás. (a) $x^3 = 1 \iff x^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \iff x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2$), azaz $x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, $x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

(b) $x^4 = -4 \iff x^4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) \iff x = \sqrt[4]{2}(\cos \frac{\pi+2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{4})$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

(c) $x^6 = 1 \iff x^6 = \cos 0 + i \sin 0 \iff x = \cos \frac{0+2k\pi}{6} + i \sin \frac{0+2k\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

6. Számítsuk ki i^n -t, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás. $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ és innentől kezdve ismétlődik, azaz

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 4k \\ i, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{ha } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}$$

7. (a) Vezessük le a $\sin(\alpha \pm \beta)$ -ra és $\cos(\alpha \pm \beta)$ -ra tanult addíciós képleteket, felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakját.

(b) Fejezzük ki $\cos 3\varphi$ -t $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ segítségével.

Megoldás. (a) Legyen $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $w = \cos \beta + i \sin \beta$ két egység hosszúságú komplex szám. Szorozzuk össze őket kétféle módon: $z \cdot w = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)i$, a trigonometrikus alakok szorzása után pedig $z \cdot w = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$. A két végeredmény természetesen ugyanaz, ezért a valós és képzetes részüket megegyezik. Kicserélve β -t $(-\beta)$ -ra kapjuk a másik két azonosságot.

(b) Tekintsük a $\cos \varphi + i \sin \varphi$ komplex számot és emeljük köbre kétféleképpen: $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi i \sin \varphi + 3 \cos \varphi i^2 \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$. Összehasonlítva a kétféle úton kapott eredmény valós részét kapjuk, hogy $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$.

5. gyakorlat

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$(a) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \quad a_n = \frac{6n+7}{11n-5}.$$

Megoldás. (a) A sorozat határértéke 0. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > 1/\varepsilon \iff n > 1/\varepsilon^2.$$

Tehát az $n_0 := \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil + 1$ küszöbindex-választás jó lesz.

(b) Ennek a sorozatnak a határértéke $6/11$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$\left| \frac{6n+7}{11n-5} - \frac{6}{11} \right| = \left| \frac{11 \cdot (6n+7) - 6 \cdot (11n-5)}{121n-55} \right| = \frac{107}{121n-55} < \varepsilon \iff n > \frac{55}{121} + \frac{107}{121 \cdot \varepsilon},$$

azaz $|a_n - 6/11| < \varepsilon$ teljesül, ha n nagyobb, mint a jobb oldalon álló (ε -tól függő) szám.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad (b) \quad \frac{2}{n}, \quad (c) \quad \frac{3}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad (d) \quad \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2 + 1}.$$

Megoldás. (a) A sorozat a $b_n = 1$ és $c_n = \frac{1}{n}$ sorozatok összege, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek összege: $\lim a_n = 1 + 0 = 1$.

(b) A sorozat a $b_n = \frac{1}{n}$ sorozat kétszerese, így a határértéke a (b_n) sorozat határértékének kétszerese: $\lim a_n = 2 \cdot 0 = 0$.

(c) A sorozat a $b_n = \frac{3}{n}$ és $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ sorozatok szorzata, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek szorzata: $\lim a_n = 0 \cdot 1 = 0$.

(d) A sorozat a $b_n = \sqrt[n]{2}$ és $c_n = n^2 + 1$ sorozatok hányadosa, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek hányadosa: $\lim a_n = \frac{1}{+\infty} = 0$.

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \frac{n+2}{3n-4} \quad (b) \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} \quad (c) \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}$$

$$(d) \frac{3^n-5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+1, 8^{n+5}} \quad (e) \frac{3^{2n}-4 \cdot 2^{n+3}}{5^n-2 \cdot 9^{n+1}+n^6} \quad (f) \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!}$$

Megoldás. (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{6}{n^2}-1} = -2.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+2}{3+\frac{5}{n}} = \frac{3}{3} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+1, 8^{n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2+1, 8^5 \cdot 0, 6^n} = \frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n}-4 \cdot 2^{n+3}}{5^n-2 \cdot 9^{n+1}+n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n-32 \cdot 2^n}{5^n-18 \cdot 9^n+n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-32 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n-18+\frac{n^6}{9^n}} = -\frac{1}{18}.$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3^n}{n!}}{5\frac{n^2}{n!}-\frac{1}{n!}+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad (b) \sqrt{n^2+6n+1}-n.$$

Megoldás. (a) A „ $\infty - \infty$ ”-típusú kifejezést az alábbi módon alakíthatjuk át:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+6n+1}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{\sqrt{n^2+6n+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

Megoldás. Ha (a_n) konvergens, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ -ra $|a_n - a| < \varepsilon$. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t, például legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor választható hozzá egy olyan n_0 küszöbszám, hogy a sorozatnak a nála nagyobb indexű elemei az $(a-1, a+1)$ intervallumban vannak, azaz ezen az intervallumon kívül legfeljebb véges sok tagja lehet a sorozatnak (az $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$ lehet kívül). Ha M -mel jelöljük az első $n_0 - 1$ tag maximumát, m -mel a minimumát, akkor a sorozatnak felső korlátja lesz a $\max\{a+1, M\}$ szám, alsó korlátja pedig a $\min\{a-1, m\}$.

A megfordítás nem igaz, az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nincs határértéke.

6. gyakorlat

A határértékek kiszámításakor jó ötletnek tűnhet, hogy egyszerűen „megpróbálunk behelyettesíteni”, de ez általában nem hoz sikert, pl. mert $0/0$ típusú eredményt kapunk. Ilyenkor egy ügyes átalakítás segíthet (algebrai, vagy trigonometrikus azonosságok).

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \frac{-1}{-1} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1/2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{2(x+1/2)} = \frac{2}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(-2x+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{5-2x} = -\frac{5}{9}; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - 2 + \frac{10}{x^2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} =?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{4}; \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x^2-9) \cdot (\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3) \cdot (\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} =?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + \dots + x + 1) = n; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^m - 1} = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} =?$$

Megoldás.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x) \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Mi legyen A értéke, hogy f folytonos legyen az $x = 2$ pontban is?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha } x \neq 2 \\ A, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

Megoldás. A megadott függvény (amely az egész \mathbb{R} -en értelmezett) akkor lesz folytonos $x = 2$ -ben, ha az ottani határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{12},$$

ezért f folytonos lesz $x = 2$ -ben, ha $A = 1/12$.

7. gyakorlat

1. ZH

8. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden $a \in \mathbb{R}$ pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:

$$a) \quad f(x) = x^n, \quad n \geq 1 \text{ egész}, \quad b) \quad h(x) = \sin x$$

Megoldás.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1};$$

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos a = \cos a.$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 (2 + x - x^2)' &= 1 - 2x, \\
 (a^5 + 5a^3x^2 - x^5)' &= 10a^3x - 5x^4, \\
 ((x - a)(x - b))' &= 1 \cdot (x - b) + (x - a) \cdot 1 = 2x - a - b, \\
 \left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)' &= \frac{2(1 - x^2) + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}, \\
 (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}, \\
 \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \\
 \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right), \\
 (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \\
 ((1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3)' &= -(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3 - 4x(1 - x^2)(1 - x)(1 - x^3)^3 - \\
 &\quad - 9x^2(1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^2, \\
 (\cos 2x - 2 \sin x)' &= -(\sin 2x) \cdot 2 - 2 \cdot \cos x, \\
 ((x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha))' &= \sin \alpha(x \cos \alpha - \sin \alpha) + \cos \alpha(x \sin \alpha + \cos \alpha) = x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha, \\
 \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' &= \frac{2 \sin x \cos x \sin x^2 - 2x \sin^2 x \cos x^2}{\sin^2 x^2} \\
 (e^{-x^2})' &= (e^{-x^2}) \cdot (-2x), \\
 (\ln \ln \ln x)' &= \frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}, \\
 \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.
 \end{aligned}$$

3. Legyen $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Mi lesz $f'(0)$?

Megoldás. Mivel külön-külön mindegyik tényező deriválja 1, a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály szerint a derivált egy öttagú összeg lesz, minden tagból pontosan az egyik tényező „hiányzik” (amikor őt deriváljuk, a többihez pedig nem nyúlunk). Az öt tag mindegyikében fog szerepelni az x -es szorzó, kivéve egyet. Emiatt $f'(0) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)|_{x=0} = 24$.

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):

$$(a) \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad (b) \quad g(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Megoldás. Mivel az x^n , illetve a $\operatorname{tg} x$ függvények deriváltját már tudjuk, az inverzfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[n]{x})' \Big|_{x=b} &= \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1}{n}-1}. \\
 (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' \Big|_{x=b} &= \frac{1}{\operatorname{tg}'(a)} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 a}} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(a)} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{1 + b^2}.
 \end{aligned}$$

5. Mennyi az $f(x) = \sin x + x$ függvény inverzének deriváltja a $b = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

Megoldás. Ha f invertálható, differenciálható az a pontban és $f'(a) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható a $b = f(a)$ pontban és $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$. Ezt alkalmazva

$$(f^{-1})' \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'(\pi/2)} = \frac{1}{1 + \cos x} \Big|_{x=\pi/2} = 1.$$

9. gyakorlat

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

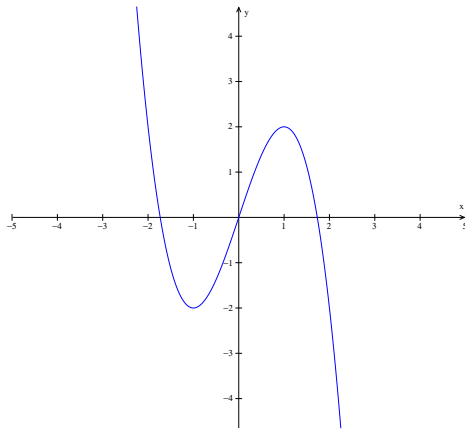
(a) $f(x) = 3x - x^3$, (b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (c) $h(x) = x + \frac{1}{x}$, (d) $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Megoldás.

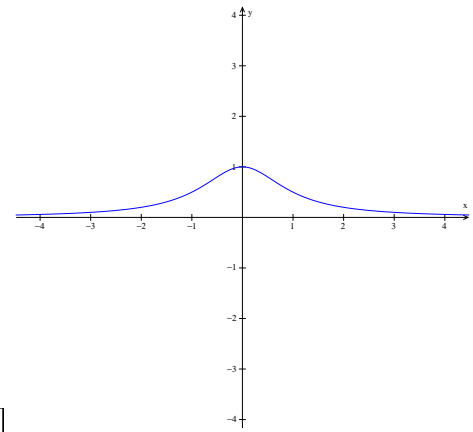
(a) A függvény egész \mathbb{R} -en értelmezett, zérushelye van a $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ pontokban, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 3 - 3x^2$, $f''(x) = -6x$, $f'''(x) = -6$. A derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőérték helyek): $-1, 1$, a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexiós pontok): 0 . Mivel f polinom, ezért mindenhol folytonos. Az alábbi táblázat segít eldönteni f alakú tulajdonságait:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	\searrow konvex	lokális minimum	\nearrow konkáv	inflexiós pont	\nearrow konkáv	lokális maximum	\searrow konkáv

A derivált mindkét zérushelyén lokális szélsőérték van, mert ott a második derivált nem nulla. Az $x = 0$ -ban inflexiós pont van, mert a harmadik derivált ott nem nulla (illetve a 0-ban a függvény konvexből konkávba vált át). A rajzhoz még számoljuk ki a függvényértékeket az $x = \pm 1$ -ben, azaz a lokális minimum és maximum értékeit: $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. A függvény értékkészlete az egész \mathbb{R} .



$[f(x) = 3x - x^3]$



$[g(x) = \frac{1}{1+x^2}]$

(b) A g függvény mindenhol értelmezett, nincs zérushelye, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Rövid számolással adódik, hogy $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $g''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Ennek megfelelően a derivált zérushelye az $x = 0$, a második derivált zérushelyei az $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ pontok.

x	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, 1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	\nearrow konvex	inflexiós pont	\nearrow konkáv	lokális maximum	\searrow konkáv	inflexiós pont	\searrow konvex

Valóban inflexiós pontokról van szó, mert a függvény konvexből konkávba vált azokban a pontokban. A függvény értékei az inflexiós pontokban, illetve a lokális szélsőérték helyen: $f(0) = 1$, $f(\pm 1/\sqrt{3}) = 3/4$. A függvény egy racionális törtfüggvény, amely mindenhol értelmezett, így mindenhol folytonos. Mivel zérushely nincs, a végtelenbeli limeszekből és a szélsőérték helyen felvett értékből a folytonosság miatt következik, hogy g értékkészlete a $(0, 1]$ intervallum.

(c) A h függvény mindenhol értelmezett, kivéve az $x = 0$ pontot. Ettől a ponttól eltekintve mindenhol máshol folytonos. Zérushelye nincs. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \infty$. Az első és második deriváltak: $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $h''(x) = \frac{2}{x^3}$. A derivált zérushelyei: -1 és 1 , a második deriváltnak nincs zérushelye.

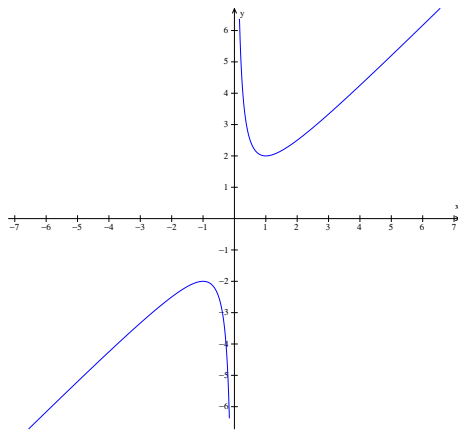
$h(-1) = -2$, $h(1) = 2$. A végtelenbeli és a szakadási pontbeli határértékeket figyelembe véve, a függvény értékkészlete a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ halmaz.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	↗ konkáv	lokális maximum	↘ konkáv	nincs értelmezve	↘ konvex	lokális minimum	↗ konvex

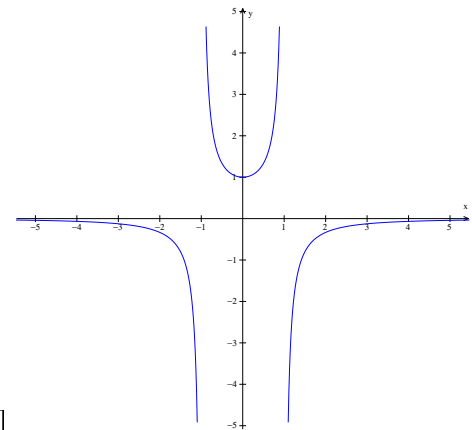
(d) A k függvény értelmezési tartománya a $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ halmaz, továbbá $D(k)$ minden pontjában folytonos. A limeszek $\pm\infty$ -ben és ± 1 -ben: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} k(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} k(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} k(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-} k(x) = -\infty$. Zérushely nincs, $k(0) = 1$. A deriváltak: $k'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $k''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$. A derivált egyetlen zérushelye $x = 0$, a második deriváltnak nincs zérushelye $D(k)$ -ban.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-		-	0	+		+
$f''(x)$	-		+	+	+		-
$f(x)$	↘ konkáv	nincs értelmezve	↘ konvex	lokális minimum	↗ konvex	nincs értelmezve	↗ konkáv

A 0-ban lokális minimum van, mert a második derivált pozitív, a minimum értéke $k(0) = 1$, ez viszont nem globális minimum, hiszen a szakadási pontokban van $-\infty$ határérték is. Az értékkészlet az $R(k) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ halmaz.



$[h(x) = x + 1/x]$



$[k(x) = \frac{1}{1-x^2}]$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőérték helyeit!

(a) $f(x) = 2x - x^4$, (b) $g(x) = e^x \sin x$.

Megoldás. (a) $f'(x) = 2 - 4x^3$, ennek a zérushelye $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$. Tehát ebben a pontban lehet lokális szélsőérték hely. Mivel $f''(x_0) < 0$, ezért x_0 -ban lokális maximum van, a maximum értéke $f(x_0) \approx 1,19$. Ez egyben globális maximum is, mert a függvény limesze a $\pm\infty$ -ben $-\infty$.

(b) $f'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$, $f''(x) = 2e^x \cos x$. Ott lehet lokális szélsőérték hely, ahol $f'(x) = 0$, azaz az $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$). A második derivált előjele ezekben a pontokban páros k -ra negatív, páratlan k -ra pozitív. Ebből következően f -nek lokális maximuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$ helyeken és lokális minimuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + (2l+1)\pi$ pontokban ($l \in \mathbb{Z}$). A függvénynek azonban nincs globális maximuma, illetve minimuma, mert f értékei a lokális maximumhelyeken végtelenhez tartanak, a minimumhelyeken felvett értékei pedig $-\infty$ -hez. Például a maximumhelyeken

$$f(x_{\max}^{(l)}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2l\pi} \rightarrow \infty, \text{ ha } l \rightarrow \infty.$$

3. (a) Egy $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?
 (b) Egy $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

Megoldás. Egyik sem igaz. Az első esetben az $f(x) = x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő, így nyilván nincs lokális szélsőértéke az $x = 0$ -ban, bár ott a deriváltja 0. A (b) részhez az $f(x) = x^4$ függvényre $f''(0) = 0$, de sehol sincs inflexiós pontja, hiszen végig konvex.

4. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \frac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

Megoldás. Az érintő egyenlete az x_0 pontban: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Mivel $f'(x) = -\sin x - \frac{4}{x^3}$ és $f(2) = \cos 2 + 1/2$, ezért a keresett érintő egyenlete

$$y = -\left(\sin 2 + \frac{1}{2}\right)(x - 2) + \cos 2 + \frac{1}{2}.$$

5. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

Megoldás.

$$\begin{aligned} (x^x)' &= (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1), \\ (\ln \sin x)' &= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x, \\ (\log_x e)' &= \left(\frac{\ln e}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}, \\ \left(\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})\right)' &= \frac{1}{(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right), \\ \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1 + x^2})\right)' &= \frac{1}{1 + (x + \sqrt{1 + x^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{2\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

6. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$ -ben is?

Megoldás. A függvény két részből van összerakva, egy paraboladarabból és egy félegyenesből áll. Azt szeretnénk, hogy a függvénygrafikon két része „csatlakozzon” (azaz f legyen folytonos) és a két darab illeszkedése legyen „sima”, ne törjön meg (azaz legyen f differenciálható). A folytonossághoz az kell, hogy a jobb és bal oldali határértékek megegyezzenek, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

azaz $1 = a + b$ -nek teljesülnie kell, hogy f egyáltalán folytonos legyen. A másik követelmény a jobb és bal oldali deriváltak egyezése, azaz

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = a = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = f'_+(1),$$

azaz $a = 2$ és $b = 1 - a = 1 - 2 = -1$.

10. gyakorlat

1. Írjuk fel az alábbi függvények n -edfokú x_0 -körüli $T_{n,x_0}(x)$ Taylor-polinomját.

(a) $f(x) = e^x$, $T_{6,0}(x) = ?$

(b) $g(x) = \sqrt{1+x}$, $T_{2,0}(x) = ?$

(c) $h(x) = x^x$, $T_{2,1}(x) = ?$

Megoldás.

$$T_{f, 6, 0}(x) = \sum_{n=0}^6 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^6 \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!};$$

$$T_{g, 2, 0}(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8};$$

$$T_{h, 2, 1}(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{h^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2.$$

2. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right).$$

Megoldás. Használjuk a Taylor-formula Lagrange-maradéktagos alakját. Eszerint ha f legalább $(n+1)$ -szer differenciálható az a pont egy környezetében, akkor

$$f(x) = T_{f, n, a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ahol ξ egy a és x közötti érték. Az $f = \sin$ függvény akárhányszor differenciálható és a megadott közelítő formula éppen $T_{f, 3, 0}(x)$, sőt, mivel a függvény negyedik deriváltja a 0-ban $\sin 0 = 0$, ezért valójában $x - \frac{x^3}{6} = T_{f, 4, 0}(x)$ is igaz. Mivel $|x| \leq 1/2$, ezért

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| = |f(x) - T_{f, 4, 0}(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \right| \leq \frac{1}{5!} |x^5| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{3840}.$$

3. Számoljuk ki e értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alpművelet felhasználásával!

Megoldás. Az e^x már kiszámolt Taylor-sorát használva

$$|e^x - T_{n, 0}(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)! > 3 \cdot 10^4 \Leftrightarrow n+1 \geq 8 \Leftrightarrow n \geq 7.$$

Tehát e egy jó közelítő értéke:

$$\hat{e} = T_{n, 0}(1) = \sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,718253968,$$

ami a pontosabb $e = 2,718281828$ értékkel összehasonlítva az első 4 tizedesjegyben valóban megegyezik.

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} =? & \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} =? & \quad \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} =? \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \log x =? & \quad \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^x =? & \quad \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx} =? \end{aligned}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x \log x &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \log x} = e^0 = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos ax} (-\sin ax) a}{\frac{1}{\cos bx} (-\sin bx) b} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \frac{1}{\cos^2 ax}}{b^2 \frac{1}{\cos^2 bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cos^2 bx}{b^2 \cos^2 ax} = \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

11. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

Megoldás.

$$\int \sqrt[3]{x^2} \, dx = \int x^{2/3} \, dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C;$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}} \, dx = \int \frac{x^{3/10}}{x^{1/6}} \, dx = \int x^{2/15} \, dx = \frac{x^{17/15}}{17/15} + C = \frac{15}{17} \sqrt[15]{x^{17}} + C;$$

$$\int (6 \sin x + 5 \cos x) \, dx = 6 \int \sin x \, dx + 5 \int \cos x \, dx = -6 \cos x + 5 \sin x + C;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$\int \frac{5 \cos 2x}{\sin x + \cos x} \, dx = 5 \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} \, dx = 5 \int (\cos x - \sin x) \, dx = 5(\sin x + \cos x) + C;$$

$$\int \frac{-5}{2 + 2x^2} \, dx = -\frac{5}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = -\frac{5}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

2. Az $\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

Megoldás.

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

$$\int (2x-3)^{10} \, dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{11}}{11} + C = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C;$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} \, dx = \int (1-x)^{-3/5} \, dx = -\frac{(1-x)^{2/5}}{2/5} + C = -\frac{5}{2}(1-x)^{2/5} + C$$

3. Számoljuk ki az alábbi $f^n(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusok primitív függvényét.

Megoldás.

$$\int x^2(2x^3+4) \, dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3+4) \, dx = \frac{1}{6} \frac{(2x^3+4)^2}{2} + C = \frac{(2x^3+4)^2}{12} + C;$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

$$\int \sin^4 x \sin 2x \, dx = 2 \int \sin^5 x \cos x \, dx = 2 \frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{4 \sin x}{5 \cos x + 4} \, dx = -\frac{4}{5} \int \frac{-5 \sin x}{5 \cos x + 4} \, dx = -\frac{4}{5} \ln|5 \cos x + 4| + C;$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{1/x}{\ln x} \, dx = \ln|\ln x| + C.$$

4. Primitív függvény kiszámítása parciális integrálással.

Megoldás.

$$\int x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C;$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$$

$$\int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \operatorname{sh}(4x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{ch}(4x) \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \operatorname{sh}(4x) - 2 \left(\frac{e^{2x}}{2} \operatorname{ch}(4x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) \, dx \right) =$$

$$= e^{2x} \left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x) \right) + 4 \int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) \, dx.$$

A kapott egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) \, dx = -\frac{e^{2x}}{3} \left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x) \right) + C.$$

12. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel.

Megoldás.

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t \, dt$, így

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = \int e^t \cdot 2t \, dt = 2 \left(te^t - \int e^t \, dt \right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C;$$

A $t = (2/3)x$ helyettesítéssel $x = (3/2)t \Rightarrow dx = 3/2 \, dt$, így

$$\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{3/2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sin} t + C = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{2}{3}x \right) + C;$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t \, dt$, így

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{2t}{1+t} \, dt = \int 2 - \frac{2}{1+t} \, dt = 2t - 2 \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C;$$

A $t = x/5$ helyettesítéssel $x = 5t \Rightarrow dx = 5 \, dt$, így

$$\int \frac{1}{25+x^2} \, dx = \frac{1}{25} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{5})^2} \, dx = \frac{1}{25} \int \frac{5}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{5} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{5} \right) + C;$$

A $t = e^x$ helyettesítéssel $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} \, dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} \, dt = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C;$$

A $t = \operatorname{arc\,sin} x$ helyettesítéssel $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \, dt$, így

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,sin} x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C;$$

A $t = \sqrt[3]{1+x^3}$ helyettesítéssel $x = \sqrt[3]{t^3-1} \Rightarrow dx = (t^3-1)^{-2/3} \cdot t^2 \, dt$, így

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} \, dx = \int (t^3-1)^{2/3} t \cdot t^2 (t^3-1)^{-2/3} \, dt = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (1+x^3)^{4/3} + C;$$

A $t = x - 1$ helyettesítéssel $x = t + 1 \Rightarrow dx = dt$, így

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{100}} dt = \int \frac{dt}{t^{97}} + 3 \int \frac{dt}{t^{98}} + 3 \int \frac{dt}{t^{99}} + \int \frac{dt}{t^{100}} = \\ &= -\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{t^{96}} - \frac{3}{97} \cdot \frac{1}{t^{97}} - \frac{3}{98} \cdot \frac{1}{t^{98}} - \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{t^{99}} + C = \\ &= -\left(\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{(x-1)^{96}} + \frac{3}{97} \cdot \frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{98} \cdot \frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{(x-1)^{99}} \right) + C; \end{aligned}$$

A $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ és az $\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2}\right)$ azonosságokból kapjuk, hogy $\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{2}\right)}$. A $t = \operatorname{th} \left(\frac{x}{2}\right)$

helyettesítéssel $x = 2 \operatorname{ar} \operatorname{th} x \Rightarrow dx = \frac{2}{1-t^2} dt$, $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, így

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \int \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1-t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{th} \left(\frac{x}{2}\right) \right| + C;$$

A $t = \ln x$ helyettesítéssel $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= \int e^t \cdot \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \left(e^t \cos t + \int e^t \sin t dt \right) = \\ &= e^t (\sin t - \cos t) - \int e^t \sin t dt; \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int e^t \cdot \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C,$$

amiből adódik az eredeti feladat megoldása:

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C;$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$, így

$$\begin{aligned} \int x \sin \sqrt{x} dx &= \int 2t^3 \sin t dt = 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cos t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6 \left(t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \left(-t \cos t + \int \cos t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C = \\ &= \cos \sqrt{x} \left(-2\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} \right) + \sin \sqrt{x} (6x - 12) + C; \end{aligned}$$

Legyen $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, ekkor a $t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, így

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int 1 dt = t + C = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2}\right) + C.$$