Kalkulus I. gyakorlat
2. összefoglalás

- **Deriválás**
  - Elemi függvények deriváltjai
  - $(\lambda f)' = \lambda f'$
    $(f \pm g)' = f' \pm g'$
    $(fg)' = f'g + fg'$
    $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
    $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$
    $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
    $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- **L'Hospital-szabály**
  - Legyen f és g differenciálható x_0 pont valamely környezetében, és legyen itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Ha $\lim\limits_{x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} g(x) = 0$ vagy ∞, akkor

    $$\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

    ha a jobboldali határérték létezik.

- **Függvényvizsgálat**
  1. $D(f)$, zérushelyek
  2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ vagy $D(f)$ szélein, szakadási pontokban jobb- és baloldali
  3. $f'(x)$, $f''(x)$ (, $f'''(x)$)
  4. lehetséges lokális szélsőértékhelyek ($f'(x) = 0$), inflexiós pontok ($f''(x) = 0$)
  5. TÁBLÁZAT! (a lehetséges lokális szélsőértékhelyek, inflexiós pontok és a szakadási pontok alapján)

     $$f'(x) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \nearrow \\ < 0 \Rightarrow \searrow \\ = 0 \text{ és } f''(x) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{lok. max.} \\ > 0 \Rightarrow \text{lok. min.} \end{cases} \quad \textit{vagy} \quad \text{és } f'(x) \text{ előjelet vált} \end{cases}$$

     $$f''(x) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{konvex} \\ < 0 \Rightarrow \text{konkáv} \\ = 0 \text{ és } f''(x) \text{ előjelet vált } \Rightarrow \text{inflexiós pont} \end{cases}$$
  6. függvény grafikonja
  7. $R(f)$

- **Érintő egyenlete x_0-ban**: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- **n-edfokú Taylor-polinom x_0 pont körül**
  - $T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
  - Lagrange-féle maradéktag: $\exists c \in (x_0, x) : f(x) - T_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$

- **Integrálás**
  - Newton–Leibniz-szabály: $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
  - Parciális integrálás: $\int f'g = fg - \int fg'$
  - Helyettesítéses integrálás: $x = g(t), \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ \mathrm{d}t$
  - Speciális alakú függvények integrálása:
    - $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
    - $\displaystyle\int f^n(x) f'(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
    - $\displaystyle\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$
  - Gyökös függvények integrálása $\left(\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \Rightarrow \sqrt{\pm\left(\frac{x \pm a}{b}\right)^2 \pm 1}\right)$:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1$$
$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \qquad \mathrm{ch}^2\, t + \mathrm{sh}^2\, t = \mathrm{ch}\, 2t$$
$$(2 \sin x \cos x = \sin 2t) \qquad (2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, 2t)$$
$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \qquad \mathrm{ch}^2\, t = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}\, 2t)$$
$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \qquad \mathrm{sh}^2\, t = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2t - 1)$$

összefüggések segítségével, $\frac{x \pm a}{b} = \sin t, \cos t, \mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t$ helyettesítéssel