Kalkulus I. gyakorlat
1. összefoglalás

- **Logika, állítások tagadása**
  - minden: $\forall \quad \longleftrightarrow \quad \exists$ olyan, amire nem teljesül...
  - létezik: $\exists \quad \longleftrightarrow \quad \forall$ olyan, amire nem teljesül...

- **Függvények**
  - Logaritmus, azonosságok, szögfüggvények,...
  - *Injektív (kölcsönösen egyértelmű)*: ha különböző $x_1, x_2 \in X$ elemeknek különböző Y-beli elemeket feleltet meg: $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$.
    Inverze is függvény.
    $f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$: injektív
    $f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2$: nem injektív
  - *Szürjektív*: ha $R(f) = Y$, azaz Y minden eleme valamelyik X-beli elemnek a képe.
  - *Bijektív*: ha $D(f) = X$, $R(f) = Y$ (szürjektív) és f injektív.
  - Jellemzés: páros / páratlan/ egyik sem, $D(f)$, $R(f)$, szélsőértékhely, szélsőérték,...

- **Komplex számok**
  - $i^2 = -1$
  - $z = a + ib$ algebrai alak $\quad \longrightarrow \quad \overline{z} = a - ib$ konjugált
    $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
    $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$
  - $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ trigonometrikus alak
    $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
    $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ és $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$
  - $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
    $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
    $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
    $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- **Számsorozatok, határérték**
  - *Sorozat határértéke.* Az (a_n) sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$-ra $|a_n - a| < \varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba esnek.)
  - *Nevezetes határértékek.*
    - Ha $|q| < 1$, akkor $q^n \to 0$. Ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \to 1$. $\sqrt[n]{n} \to 1$.
  - *„Erősorrend”.* $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ esetén: $n^k, a^n, n!, n^n$. $\Rightarrow \dfrac{n^k}{a^n} \to 0$, $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$, $\dfrac{n^k}{n!} \to 0$, $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$.
  - *Módszer.* A nevezetes határértékek és a műveleti szabályok alkalmazásával számítjuk ki a határértékeket, nem a definíció alapján + „rendőr-elv”.
  - *Kivételek.* $\infty - \infty$, $\quad \infty \cdot 0$, $\quad \frac{\infty}{\infty}$, $\quad \frac{0}{0}$ ezeknél átalakítás szükséges.

- **Függvényhatárérték**
  - A határértékek kiszámításakor jó ötletnek tűnhet, hogy egyszerűen „megpróbálunk behelyettesíteni”, de ez általában nem hoz sikert, pl. mert 0/0 típusú eredményt kapunk. Ilyenkor egy ügyes átalakítás segíthet (algebrai, vagy trigonometrikus azonosságok).