Kalkulus I. gyakorlat
Fizika BSc I/1.
8. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat esetén az alábbi lépéseken kell végigmenni:

Deriválás nélkül is megkapható: értelmezési tartomány, [tengelymetszetek (zérushelyek)], limeszek $\pm\infty$-ben (vagy az értelmezési tartomány „szélein"), folytonosság, bal és jobb oldali limeszek a szakadási pontokban.

Deriválás után: lokális szélsőértékek (a derivált előjelváltásai), inflexiós pontok (a második derivált előjelváltásai), a függvény alaki tulajdonságai (monotonitás, konvexitás), [az eddigiek alapján értékkészlet], végül a függvény grafikonja. A monotonitáshoz és a konvexitáshoz érdemes táblázatot készíteni, a grafikonhoz pedig hasznos néhány függvényértéket kiszámolni (pl. a szélsőértékhelyeken).

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

$$\text{(a)}\quad f(x) = 3x - x^3, \qquad \text{(b)}\quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{(c)}\quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = 2x - x^4$ és a $g(x) = e^x \sin x$ függvény lokális és globális szélsőértékhelyeit!

3. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \dfrac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

4. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!
   (a) $(x^x)'$
   (b) $(\ln \sin x)'$
   (c) $(\log_x e)'$
   (d) $\left(\ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)'$
   (e) $\left(\operatorname{arc\,tg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)'$

5. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \le 1 \\ ax+b, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$-ben is?