

KALKULUS I. GYAKORLAT
FIZIKA BSC I/1.
4. gyakorlat

Emlékeztető

- **Sorozat határértéke.** Az (a_n) sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ -ra $|a_n - a| < \varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba esnek.)
 - **Nevezetes határértékek.**
 - Ha $|q| < 1$, akkor $q^n \rightarrow 0$.
 - Ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.
 - $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$.
 - **"Erősorrend".** $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ esetén: $n^k, a^n, n!, n^n. \Rightarrow$
 $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0, \quad \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \frac{n^k}{n!} \rightarrow 0, \quad \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$.
 - **Módszer.** A nevezetes határértékek és a műveleti szabályok alkalmazásával számítjuk ki a határértékeket, nem a definíció alapján. Rendőr-elv.
 - **Kivételek.** $\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$ ezeknél átalakítás szükséges.
-

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$;

(b) $a_n = \frac{6n + 7}{11n - 5}$.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

(a) $1 + \frac{1}{n}$

(b) $\frac{2}{n}$

(c) $\frac{3}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(d) $\frac{\sqrt[n]{2}}{n^2 + 1}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $\frac{n + 2}{3n - 4}$

(b) $\frac{2n^2 - 3n - 5}{6 - n^2}$

(c) $\frac{\sqrt{n^2 + 3} + 2n}{3n + 5}$

(d) $\frac{3^n - 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 1, 8^{n+5}}$

(e) $\frac{3^{2n} - 4 \cdot 2^{n+3}}{5^n - 2 \cdot 9^{n+1} + n^6}$

(f) $\frac{2n! + 3^n}{5n^2 - 1 + n!}$

$$(g) \frac{n^3 + 2n^2 + 3}{2n^4 + 3n^2 + 2n}$$

$$(h) \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^5$$

$$(i) \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(b) \sqrt{n^2 + 6n + 1} - n$$

$$(c) n - n^2$$

$$(d) (-1)^{n+1}n$$

$$(e) (-1)^{n+1}/n$$

$$(f) \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}}$$