

KALKULUS GYAKORLAT - MEGOLDÁSVÁZLATOK
FIZIKA BSC I/2

1. gyakorlat

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és F primitív függvénye f -nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; \\ \int_0^1 3x^5 - x^2 \, dx &= \left[\frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \\ \int_0^1 e^x \, dx &= [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx &= [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0; \\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx &= -[\ln |\cos x|]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln \cos \frac{\pi}{3} + \ln \cos \frac{\pi}{6} = -\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln \sqrt{3}.\end{aligned}$$

(b) A primitív függvényt mindkét esetben parciális integrálással határozhatjuk meg.

Egy primitív függvény $xe^x - e^x$, ezért

$$\int_0^2 xe^x \, dx = [xe^x - e^x]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0e^0 - e^0) = e^2 + 1.$$

Az $x \mapsto x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ függvény egy primitív függvény, így

$$\int_0^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \left[x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^3 = \left(3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - \frac{1}{2} \ln(1 + 3^2) \right) - 0 = 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - \frac{1}{2} \ln 10.$$

(c) Ezekben a feladatokban helyettesítéses integrálással lehet egy-egy primitív függvényt megkeresni.

A $t = 3x + 4$ helyettesítés után $x = \frac{t-4}{3}$, $dx = \frac{1}{3} dt$, így

$$\int (3x + 4)^3 \, dx = \int \frac{t^3}{3} \, dt = \frac{t^4}{12} + C = \frac{(3x + 4)^4}{12} + C,$$

ezért

$$\int_1^2 (3x + 4)^3 \, dx = \left[\frac{(3x + 4)^4}{12} \right]_1^2 = \frac{7599}{12} = 633,25.$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítés után $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$, így

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int te^t \, dt = 2 \left(te^t - \int e^t \, dt \right) = 2e^t(t - 1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C,$$

ezért

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \left[e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) \right]_0^1 = 2.$$

A $t = \arcsin x$ helyettesítés után $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C, \end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Végül a $t = e^x$ helyettesítés után $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x + 1) + C,$$

vagyis

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = [e^x - \ln(e^x + 1)]_0^1 = (e - \ln(e + 1)) - (1 - \ln 2).$$

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x + 2\}$;
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$;
- (d) az $y = \sin x$ és az $y = (2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom.

Megoldás. (a) A megadott parabola az $x = \pm 2$ pontokban metszi az x -tengelyt, a keresett terület pedig az $y = 4 - x^2$ függvény grafikonja alatti terület a $[-2, 2]$ intervallumon, ami $\int_{-2}^2 4 - x^2 dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$.

(b) A kérdéses síkidom nem más, mint az $y = x + 2$ egyenes és az $y = x^2$ parabola által bezárt síkrész. Az egyenes és a parabola metszéspontjainak abszcisszái -1 és 2 . A keresett területet nem más, mint a $[-1, 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x + 2$ grafikonja alatti terület és a $g(x) = x^2$ grafikonja alatti terület különbsége. A Newton-Leibniz formulából az első terület $\int_{-1}^2 x + 2 dx = [\frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^2 = (2 + 4) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{15}{2}$, míg a második $\int_{-1}^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - (-\frac{1}{3}) = 3$. Tehát a kérdéses terület $\frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$.

(c) A kérdéses terület két integrál különbségeként áll elő: a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x^2$ függvények grafikonja alatti területek különbségeként. A terület tehát $\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

(d) A keresett terület most is megkapható két integrál különbségeként: $T = \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_0^{\pi/2} (2/\pi)x dx = 1 - \pi/4$.

2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények primitív függvényeit!

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+3} dx &= \ln|x+3| + C; \\ \int \frac{1}{(x-3)^4} dx &= \int (x-3)^{-4} dx = \frac{(x-3)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x-3)^3} + C; \\ \int \frac{3x+6}{5x-1} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{5x+10}{5x-1} dx = \frac{3}{5} \int \frac{5x-1+11}{5x-1} dx = \frac{3}{5} \int 1 + \frac{11}{5x-1} dx = \frac{3}{5} \int 1 + \frac{11}{5} \frac{5}{5x-1} dx \\ &= \frac{3}{5}x + \frac{33}{25} \ln|5x-1| + C. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2+9} dx &= \ln(x^2+9) + C; \\ \int \frac{x-3}{x^2-6x+27} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+27} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+27) + C; \\ \int \frac{6x^2-2}{x^3-x+18} dx &= 2 \int \frac{3x^2-1}{x^3-x+18} dx = 2 \ln|x^3-x+18| + C. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \arctg(x+1) + C; \\ \int \frac{x-1}{x^2 - 6x + 25} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2 - 6x + 25} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6)+4}{x^2 - 6x + 25} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2 - 6x + 25} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 25) + 2 \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 25) + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 25) + \frac{1}{8} \frac{\arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)}{1/4} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 25) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

(d)

$$\int \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} dx = \int \frac{dx}{2(x-1)(x-1/2)} = \frac{1}{2} \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1/2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(A+B)x - B - A/2}{(x-1)(x-1/2)} dx,$$

amiből következik, hogy $A + B = 0$ és $-B - A/2 = 1$, azaz $A = 2$, $B = -2$, így ezeket az értékeket visszaírva

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-1/2} dx = \ln|x-1| - \ln|x-1/2| + C; \\ \int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx &= \int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} dx \\ &= \int \frac{x^2(A+B+C) + x(2A+3B-C) - 3A}{x(x-1)(x+3)} dx, \end{aligned}$$

amiből $A + B + C = 4$, $2A + 3B - C = 13$ és $-3A = -9$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $A = 3$, $B = 2$ és $C = -1$,

$$= \int \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3} dx = 3 \ln|x| + 2 \ln|x-1| - \ln|x+3| + C.$$

2. Számítsuk ki az alábbi függvények primitív függvényeit!

(a) A $t = \arcsin x$ helyettesítés után $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(b) A $t = \operatorname{arsh} x$ helyettesítés után $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \operatorname{ch} 2t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arsh} x + x\sqrt{1+x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(c) A $t = \operatorname{arch} x$ helyettesítés után $x = \operatorname{ch} t$, $dx = \operatorname{sh} t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t dt = \int \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2t - 1 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arch} x \right) + C. \end{aligned}$$

(d) Mivel $4-x^2 = 4\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$, ezért a $t = \arcsin \frac{x}{2}$ helyettesítés után $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= 2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int 1 + \cos 2t dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \sqrt{4-x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(e) Mivel $-x^2 + 4x - 3 = 1 - (x - 2)^2$, ezért a $t = \arcsin(x - 2)$ helyettesítés után $x = \sin t + 2$, $dx = \cos t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2 + 4x - 3} dx &= \int \sqrt{1 - (x - 2)^2} dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin(x - 2) + (x - 2) \sqrt{1 - (x - 2)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(f) Mivel $x^2 + 2x + 5 = 4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)$, ezért a $t = \operatorname{arsh} \frac{x+1}{2}$ helyettesítés után $x = 2 \operatorname{sh} t - 1$, $dx = 2 \operatorname{ch} t dt$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx &= 2 \int \sqrt{1 + \left(\frac{x+1}{2} \right)^2} dx = 4 \int \operatorname{ch}^2 t dt = 2 \int 1 + \operatorname{ch} 2t dt = 2 \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right) + C \\ &= 2 \left(\operatorname{arsh} \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x+1}{2} \right)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

3. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx & \quad \text{(b)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx & \quad \text{(c)} \quad \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx & \quad \text{(d)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ \text{(e)} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx & \quad \text{(f)} \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx & \quad \text{(g)} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \end{aligned}$$

Megoldás. (a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t - \ln 1 = +\infty,$$

mert $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$.

(b)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1.$$

(c)

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t 2e^{-x} dx = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t -e^{-x} dx = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{-x}]_0^t = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t} - 1) = 2,$$

hiszen $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$.

(d)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_t^0 + \lim_{u \rightarrow +\infty} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^u \\ &= - \lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + \lim_{u \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = -\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

(e) Mivel $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ egy primitív függvénye $\frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)$, ezért

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) - (\ln|2-1| - \ln|2+1|) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) + \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Mivel t -vel $+\infty$ -hez tartunk, azért az abszolútérték elhagyható, és így

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2},$$

ugyanis $\ln \frac{t-1}{t+1} = \ln \frac{t+1-2}{t+1} = \ln(1 - \frac{2}{t+1})$, és ez a függvény $t \rightarrow +\infty$ esetén $\ln 1 = 0$ -hoz tart.

(f) A $[0, +\infty)$ intervallumon xe^{-x} egy primitív függvénye

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x},$$

így

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(-te^{-t} - e^{-t}) - (0e^0 - e^0)] = 1.$$

(g) A $[2, +\infty)$ intervallumon $\frac{1}{x \ln x}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln(\ln x),$$

így

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(\ln x)]_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

2. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (c) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (d) \int_0^1 \ln x dx \quad (e) \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

Megoldás. (a)

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln 1 - \ln t = \infty,$$

mert $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$.

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} -1 + \frac{1}{t} = \infty.$$

(c)

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} [\sqrt[3]{x^2}]_t^8 = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} (4 - \sqrt[3]{t^2}) = 6.$$

(d) A $(0, 1]$ intervallumon $\ln x$ egy primitív függvénye $\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x$, ezért

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} [(1 \ln 1 - 1) - (t \ln t - t)] = -1.$$

(e) A $[-2, 1)$ intervallumon $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int (1-x)^{-1/2} dx = -2(1-x)^{1/2},$$

ezért

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} [-2(1-x)^{1/2}]_{-2}^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} (-2(1-t)^{1/2}) - (-2(1-(-2))^{1/2}) = 2\sqrt{3}.$$

3. Milyen valós α -ra lesznek konvergensek az alábbi improprius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Megoldás. (a) A $\alpha \neq 1$ esetén $\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ egy primitív függvénye $\frac{1}{x^\alpha}$ -nak a $(0, +\infty)$ intervallumon, ezért

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor egy primitív függvény $\ln x$, így

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha > 1$ esetén lesznek konvergensek.

(b) Az (a) esethez hasonlóan $\alpha \neq 1$ -re:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{ha } \alpha < 1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} [\ln x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0+0} (-\ln t) = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha < 1$ esetén lesznek konvergensek.

4. gyakorlat

A $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sor konvergens, ha az $S_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$ tagokból álló (S_k) , ún. részletösszeg-sorozat konvergens. Ebben az esetben ezt a határértéket a sor összegének nevezzük.

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Megoldás. (a) $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$, és mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, ezért a sor divergens.

(b) Itt $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}$, azaz $S_n = 1$, ha n páros, illetve $S_n = 0$, ha n páratlan, ezért az (S_n) sorozatnak nincs határértéke, tehát a sor divergens.

(c) Végül

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}},$$

ami $n \rightarrow \infty$ esetén 2-höz tart, vagyis a sor konvergens és az összege 2.

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk is meg az összegüket.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q| < 1) \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

Megoldás. A sor konvergenciájához azt kell megmutatni, hogy a részletösszegek sorozata konvergens. A sor összegét akkor tudjuk megmondani, ha a részletösszeg-sorozat határértéke ismert.

(a)

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

vagyis a sor konvergens és összege $\frac{1}{1 - q}$.

(b)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

a sor összege tehát 1.

(c)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{3(n-1)+1} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$, azaz a sor konvergens és összege $1/3$.

3. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor.

Megoldás. Mivel $\sum 1/n^2$ pozitív tagú sor, ezért a részletösszegek sorozata monoton növekvő. A konvergenciához elég belátni, hogy (S_n) felülről korlátos. Az előző feladat (b) része szerint

$$S_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

azaz a sor valóban konvergens. (A konvergencia tényén kívül azonban az összeg értékét nem tudtuk megállapítani.) A $\sum 1/n$ sor divergenciájához azt mutatjuk meg, hogy a részletösszegek sorozata nem korlátos. Tekintsük a 2-hatvány indexű részsorozatát:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}+1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-2}+1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

vagyis a monoton növekvő (S_n) sorozatnak van egy végtelenhez tartó részsorozata, így $S_n \rightarrow \infty$ szintén, tehát a sor divergens.

4. Állapítsuk meg gyök- vagy hányadoskritériummal, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} & \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(c)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \\ \text{(d)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} & \text{(e)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} & \text{(f)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1000+k}{2k+1} \end{aligned}$$

Megoldás.

(a)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1} \rightarrow 0 < 1,$$

a sor konvergens.

(b)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \rightarrow \frac{1}{4} < 1,$$

tehát a sor konvergens.

(c)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,37 < 1,$$

tehát a sor konvergens.

(d)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} \approx 0,74 < 1,$$

a sor konvergens.

(e)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{3}{e} \approx 1,10 > 1,$$

a sor tehát divergens.

(f)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \frac{1000+k}{2k+1}}{\prod_{k=0}^n \frac{1000+k}{2k+1}} = \frac{1000+n+1}{2(n+1)+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

a sor tehát konvergens.

Noha a gyökkritérium erősebb, mégis érdekesebb a számolást a hányadoskritériummal kezdeni, mert sok esetben könnyen lehet egyszerűsíteni. Az itt szereplő feladatok gyökkritériummal is kijönnek, ám ehhez tudni kell bizonyos sorozatok határértékeit. Például az (a) feladatra a gyökkritériummal oda jutnánk, hogy a $\sqrt[n]{n!}$ sorozat határértékét kellene tudnunk (amit egyébként tudhatunk is: ez $+\infty$), a (c), (d) és (e) feladatoknál pedig az $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat határértéke jön elő (amiről belátható, hogy $1/e$ -vel egyenlő).

5. Állapítsuk meg az összehasonlító kritériumok alapján, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Megoldás. (a) Mivel $n+(-1)^n \leq n+1$, ezért $\frac{1}{n+(-1)^n} \geq \frac{1}{n+1}$, továbbá a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(b)

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{4},$$

ahol az $1/4$ helyére akár $1/e$ -t is írhattunk volna. Itt $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(c)

$$\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n+1},$$

továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens, így az eredeti sor is divergens.

(d) Itt $\sqrt[n]{n} \geq 2$, ha $n \geq 4$, azaz az első három tag kivételével a sort felülről lehet becsülni a konvergens $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorral, tehát az eredeti sor is konvergens.

5. gyakorlat

Ha (a_n) egy adott számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám, akkor az

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük. Azon x pontok halmazát, ahol a fenti sor konvergens, a hatványsor konvergenciahalmazának hívjuk. Például $x = x_0$ esetén a fenti sor biztosan konvergál (hiszen az összegben az első kivételével minden tag nulla). Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú, R sugarú intervallum. Ha létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor ez a sugár az

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

képlettel számolható. Ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R -re egy hasonló képlet.

Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy végtelen sokszor differenciálható függvény, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

hatványsort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. Előadáson szerepel néhány nevezetes ($x_0 = 0$ -hoz tartozó) Taylor-sor, ezek a következők:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \\ \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \dots \\ \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots \end{aligned}$$

ahol a fenti Taylor-sorok egész \mathbb{R} -en konvergensek (és ott elő is állítják a függvényeket), míg az alábbi sor-előállítás csak a $(-1, 1]$ intervallumon érvényes:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ezekon kívül még érdemes ismerni a mértani sor összegét is:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad \text{ahol } x \in (-1, 1).$$

1. Állítsuk elő deriválással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

(a) $H = (-1, 1)$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,

(b) $H = (-1, 1)$, $f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Megoldás. (a) Ismeretes, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Hatványsort a konvergenciaintervallum belsejében lehet tagonként deriválni, így

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$

(b) Mivel minden $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

ezért x helyébe $-x$ -et írva

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

teljesül minden $x \in (-1, 1)$ esetén. Továbbá, ha x helyébe x^2 -et helyettesítünk, akkor

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

A kérdéses függvény az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény deriváltja, így

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^{2n})' = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (2n) x^{2n-1}.$$

2. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

(a) $H = (-1, 1)$, $f(x) = \ln(1+x)$,

(b) $H = (-1, 1)$, $f(x) = \arctg x$.

Megoldás. (a) Az előző feladatban láttuk, hogy $t \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

A konvergencia-intervallum belsejében hatványsort tagonként integrálhatunk. Így $t \in (-1, 1)$ esetén

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^n dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{aligned}$$

(b) Ugyancsak láttuk, hogy $t \in (-1, 1)$ esetén $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$. Az $\arctan x$ függvény az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integrálja, így

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

3. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 középi Taylor-sorát!

(a) $\sin x^2$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) e^{-x} (d) xe^{-x} (e) $\frac{x^2}{1+x^2}$

Megoldás. Felhasználjuk a már ismert Taylor sorokat, majd az egyértelműséget használjuk, azaz: ha egy $(-R, R)$ intervallumban $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, akkor a jobb oldalon álló hatványsor az f függvény 0 középi Taylor sora.

(a) A \sin függvény 0 középpontú hatványsorában x helyébe x^2 -et írva

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

adódik.

(b) A $(-1, 1)$ intervallumon $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Most x helyébe $-x^2$ -et írva $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

(c) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, ezért $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

(d) $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, így $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$.

(e) A $(-1, 1)$ intervallumon $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, ezért $\frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2}$.

4. Írjuk fel az alábbi függvények 0 középi Taylor-sorát!

(a) $\frac{1}{1-4x^2}$ (b) $\arctan x$

Megoldás. (a) A mértani sor $(-1, 1)$ -en érvényes előállításából kiindulva

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{1-(2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} ((2x)^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n},$$

ahol $|(2x)^2| < 1$, azaz $|x| < 1/2$ esetén érvényes a formula.

(b) Korábban előállítottuk ezt a függvényt hatványsor alakjában a $(-1, 1)$ intervallumon, így ezen a halmazon a Taylor-sor egyértelműsége miatt a függvény Taylor-sora is ez lesz.

Ha nem jut eszünkbe a módszer, amivel kiszámoltuk ezeket a Taylor-sorokat, kiindulhatunk a definícióból is, azaz számoljuk ki a megadott függvények deriváltjait és írjuk fel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sort.

A következő feladathoz hasznos lesz az ún. Lagrange-maradéktagos Taylor-formula: ha f az $[a, x]$ intervallumban $(n+1)$ -szer differenciálható, akkor létezik olyan $\xi \in (a, x)$ szám, melyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

vagyis f felírható $f = T_n + R_n$ alakban, ahol T_n az (a) ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinom, R_n pedig a maradéktag.

5. (a) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumon e^x kiszámításához az

(i) $e^x \approx 1+x$, (ii) $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$

közelítő képleteket használjuk?

- (b) i. Miért mondják azt, hogy „kis x esetén $\sin x \approx x$ ”? Határozzuk meg azt az I intervallumot, melyre érvényes, hogy $x \in I$ esetén $|\sin x - x| \leq 0,01$!
- ii. Mutassuk meg, hogy ha az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

közeliítő képletet használjuk, akkor legfeljebb 0,005 hibát követünk el! Ellenőrizzük ezt például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén!

Megoldás. (a) A két polinom az e^x függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó első-, illetve másodfokú Taylor-polinomja. A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula alapján

$$|e^x - (1+x)| = \frac{|e^\xi|}{2!} |x|^2 \leq \frac{1,65}{2!} \frac{1}{4} = 0,2063; \quad \text{illetve} \quad \left| e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \right| = \frac{|e^\eta|}{3!} |x|^3 \leq \frac{1,65}{3!} \frac{1}{8} = 0,0344;$$

ahol ξ, η valamilyen 0 és x közötti számok. Mivel most $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, ezért $|x|$ felülről becsülhető $\frac{1}{2}$ -del.

(b) Az $f(x) = \sin x$ függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó első-, sőt a másodfokú Taylor-polinomja is a $T_2(x) = x$ függvény. Nekünk az kell most, hogy

$$|\sin x - x| = |\sin x - T_2(x)| = \left| \frac{(\sin^{(3)})(\xi)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{6} |x|^3 < 0,01$$

legyen. Ebből azt kapjuk, hogy $|x| \leq 0,3914$, azaz a $[-0,3914, 0,3914]$ intervallumban a $\sin x \approx x$ közelítéssel legfeljebb 0,01-ot tévedünk.

Ha most az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vagyunk és a megadott polinomot használjuk, ami a hatodfokú Taylor-polinomja a szinuszfüggvénynek a nulla körül, akkor

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \right| = |\sin x - T_6(x)| = \left| \frac{(\sin^{(7)})(\xi)}{7!} x^7 \right| \leq \frac{1}{7!} |x|^7 \leq \frac{1}{5040} \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \approx 0,00468 < 0,005.$$

Például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén tudjuk, hogy $\sin \frac{\pi}{6} = 0,5$. A fenti közelítő képletet használva 16 tizedesjegy pontossággal

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 6^3} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^5} = 0.500002132588792 \approx 0.5,$$

ami jóval a kiszámolt hibahatáron belül van.

6. Írjuk fel 0 középső hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!

Megoldás. Korábban láttuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, ezért az egyenlőség fennáll, ha x helyébe $-x^2$ -et

írunk: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$. Egy primitív függvény meghatározásához nem kell mást tenni, mint tagonként integrálni a hatványsort.

$$\int e^{-x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

6. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvényt trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy 2π -szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0, 2\pi]$ intervallumot is, ekkor a fenti definíciók értelemszerűen módosulnának). A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontenkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f -hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

Ha az f függvény páros, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $t \mapsto f(t) \sin nt$ függvény páratlan, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon 0 az integrálja, ezért a Fourier-sorában a b_n együtthatók mindegyike 0. Ha az f függvény páratlan, akkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $t \mapsto f(t) \cos nt$ páratlan függvény, ezért a Fourier-sorában az a_n együtthatók mindegyike 0.

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!

(a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ -re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. A függvény Fourier-sora az egész \mathbb{R} -en konvergens, és minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ esetén előállítja a függvényt. A Fourier-együtthatók:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{n} dt \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[-t \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{n} dt \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Így a Fourier-sor:

$$\pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt a Fourier-sor, és tiszta szinuszos-sor, mert a függvény páratlan (azaz $a_n = 0$). A (b_n) együtthatók:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\pi - t}{2} \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\cos nt}{n} dt \right) = \frac{1}{n}.$$

A Fourier-sor:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

(c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$ -re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. f páros függvény, így minden $n \in \mathbb{N}$ -re $b_n = 0$. A többi Fourier-együttható:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(0 - \left[-\frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

(d) $f(x) = (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

Megoldás. A Fourier-sor tiszta koszinuszos-sor (azaz $b_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén) lesz, ugyanis f páros függvény. Az a_n együtthatók:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[(\pi - t)^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2(\pi - t) \frac{\sin nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 + \left[-2(\pi - t) \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2 \frac{\cos nt}{n^2} dt \right) = \frac{2}{\pi} \frac{2\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

Így a Fourier-sor:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Előadás

1. ZH

7. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$(a) f(x, y) = x^2 \quad (b) f(x, y) = y^3 \quad (c) f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$(d) f(x, y) = x^2 y^4 \quad (e) f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad (f) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{e^y}$$

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x, y) = 2x$, $\partial_2 f(x, y) = 0$.

(b) $\partial_1 f(x, y) = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 3y^2$.

(c) $\partial_1 f(x, y) = 2x$, $\partial_2 f(x, y) = 3y^2$.

(d) $\partial_1 f(x, y) = 2xy^4$, $\partial_2 f(x, y) = 4x^2 y^3$.

(e) $f(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$, így $\partial_1 f(x, y) = e^{-y^2} e^{-x^2} (-2x)$, $\partial_2 f(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2} (-2y)$.

(f) $\partial_1 f(x, y) = 2 \frac{xy^2}{e^y}$, $\partial_2 f(x, y) = x^2 \left(\frac{2ye^y - e^y y^2}{(e^y)^2} \right) = x^2 \left(\frac{2y - y^2}{e^y} \right)$.

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1 \partial_3 f$, $\partial_1 \partial_2 \partial_3 f$, $\partial_3 \partial_2 \partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:

$$(a) f(x, y, z) = 5z,$$

$$(b) f(x, y, z) = x + y + z,$$

$$(c) f(x, y, z) = ze^{x-y}.$$

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x, y) = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 0$, $\partial_3 f(x, y) = 5$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(b) $\partial_1 f(x, y) = 1$, $\partial_2 f(x, y) = 1$, $\partial_3 f(x, y) = 1$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(c) $\partial_1 f(x, y) = ze^{x-y}$, $\partial_2 f(x, y) = -ze^{x-y}$, $\partial_3 f(x, y) = e^{x-y}$. A másodrendű deriváltak: $\partial_1^2 f(x, y) = \partial_1 \partial_1 f(x, y) = ze^{x-y}$, $\partial_2^2 f(x, y) = \partial_2 \partial_2 f(x, y) = ze^{x-y}$, $\partial_1 \partial_3 f(x, y) = e^{x-y}$. A harmadrendű deriváltak: $\partial_1 \partial_2 \partial_3 f(x, y) = -e^{x-y}$, $\partial_3 \partial_2 \partial_1 f(x, y) = -e^{x-y}$.

3. Mi lesz a $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa, ha $g(x, y) =$

$$(a) (x, y) \quad (b) (x^4 + x^2 y^2 + y^4, x^4 + x^2 y^2 + y^4) \quad (c) (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$(d) \left(e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} \cos y, e^x \sin(y + \ln 2y) \right)$$

Megoldás. Ha $f = (f_1, f_2)$, akkor

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően $g'(x, y) =$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 & 4y^3 + 2yx^2 \\ 4x^3 + 2xy^2 & 4y^3 + 2yx^2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} (2x + 3 \operatorname{ch} 3x) & -e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} \sin y \\ e^x \sin(y + \ln 2y) & e^x \cos(y + \ln 2y) (1 + 1/y) \end{pmatrix}$$

4. Számítsuk ki $f'(x, y, z)$ -t, ha $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) =$

$$(a) (x^2 y, y + z) \quad (b) (x^y, x^{y^z})$$

Megoldás.

$$(a) \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ y^z x^{y^z-1} & x^{y^z} (\ln x) z y^{z-1} & x^{y^z} (\ln x) y^z \ln y \end{pmatrix}$$

5. Számítsuk ki $f''(3, 4)$ -et, ahol

$$(a) \quad f(x, y) = xy \quad (b) \quad f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \quad (c) \quad f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Megoldás. Ha $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, akkor

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_2 \partial_1 f \\ \partial_1 \partial_2 f & \partial_2^2 f \end{pmatrix}.$$

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 140 & 48 \\ 48 & 210 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{25^2} & -\frac{24}{25^2} \\ -\frac{24}{25^2} & \frac{7}{25^2} \end{pmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy ha $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, illetve $u(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0.$$

Megoldás. (a)

$$\partial_1^2 (\ln(x^2 + y^2)) = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2 (\ln(x^2 + y^2)) = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összegük valóban nulla.

(b)

$$\partial_1^2 \left(\arctg \frac{x}{y} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2 \left(\arctg \frac{x}{y} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összeg itt is nulla.

8. gyakorlat

Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$, azaz $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, akkor az $f''(a)$ mátrix pozitív definitisége esetén a -ban szigorú lokális minimum, az $f''(a)$ mátrix negatív definitisége esetén a -ban szigorú lokális maximum van. Ha az $f''(a)$ mátrix indefinit, akkor az a pontban nincs szélsőérték.

Ha $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, akkor

- (i) A pozitív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} > 0$,
- (ii) A negatív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} < 0$,
- (iii) A indefinit, ha $\det A < 0$.

1. Keressük meg az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!

- (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
- (b) $f(x, y) = (x^2 + 1)(y + \frac{1}{y})$;
- (c) $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$;
- (d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
- (e) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
- (f) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$.

Megoldás. (a) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x = 0$. Az első egyenletből $y = x^2$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1) \iff x = 0 \text{ vagy } x = 1.$$

Vagyis az $f'(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x, y) = (0, 0)$, illetve $(1, 1)$.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0, 0) = -9 < 0$, azaz $f''(0, 0)$ indefinit, vagyis $(0, 0)$ nem szélsőérték hely; az $f''(1, 1)$ mátrix viszont pozitív definit, vagyis $(1, 1)$ szigorú lokális minimum.

(b) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x, y) = 2x(y + \frac{1}{y}) = 0$, $\partial_2 f(x, y) = (x^2 + 1)(1 - \frac{1}{y^2}) = 0$. A fenti egyenletrendszer megoldásai: $x = 0, y = \pm 1$, azaz az $f'(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok: $(x, y) = (0, 1)$ illetve $(0, -1)$.

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y + \frac{1}{y}) & 2x(1 - \frac{1}{y^2}) \\ 2x(1 - \frac{1}{y^2}) & 2(x^2 + 1)\frac{1}{y^3} \end{pmatrix} \Rightarrow f''(0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(0, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0, 1) = 8 > 0$ és $4 > 0$, azaz $f''(0, 1)$ pozitív definit, vagyis $(0, 1)$ szigorú lokális minimum; $\det f''(0, -1) = 8 > 0$, azaz $f''(0, -1)$ pozitív definit, vagyis $(0, -1)$ szigorú lokális minimum.

(c) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x, y) = 4x^3 - 4y = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 4y^3 - 4x = 0$. Az első egyenletből $y = x^3$, ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = 4x^9 - 4x = 4x(x^8 - 1) \iff x = 0, x = 1 \text{ vagy } x = -1.$$

Tehát az $f'(x, y) = 0$ egyenlet megoldásai: $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 1)$ illetve $(-1, -1)$. Mivel

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

ezért

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad f''(-1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Itt $\det f''(0, 0) = -16 < 0$, azaz $f''(0, 0)$ indefinit, vagyis $(0, 0)$ nem szélsőérték hely; $\det f''(1, 1) = 128 > 0$ és $12 > 0$, azaz $f''(1, 1)$ pozitív definit, vagyis $(1, 1)$ szigorú lokális minimum; $f''(1, 1) = f''(-1, -1)$, így a $(-1, -1)$ pontban is szigorú lokális minimum van.

(d) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x, y) = 4x^3 - 2x = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 4y^3 - 4y = 0$. A fenti egyenleteket átalakítva

$$\begin{aligned} 2x(2x^2 - 1) = 0 &\implies x = 0, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ vagy } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 4y(y^2 - 1) = 0 &\implies y = 0, y = 1 \text{ vagy } y = -1. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right).$$

A második derivált

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} f''(0, 0) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit,} \\ f''(0, 1) &= f''(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,} \\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,} \\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) &= f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right) = f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit} \end{aligned}$$

Tehát a függvénynek a $(0, 0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(e) A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= 8x^3 - 2x = 0 \implies x = 0, x = \frac{1}{2} \text{ vagy } x = -\frac{1}{2} \\ \partial_2 f(x, y) &= 4y^3 - 4y = 0 \implies y = 0, y = 1 \text{ vagy } y = -1. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right).$$

Mivel

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

ebből következően

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit,}$$

$$f''(0, 1) = f''(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}, 0\right) = f''\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit,}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}, 1\right) = f''\left(\frac{1}{2}, -1\right) = f''\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = f''\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit}$$

Tehát a függvénynek a $(0, 0)$ pontban szigorú lokális maximuma van, az $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(-\frac{1}{2}, -1)$ pontokban szigorú lokális minimuma van, a maradék pontokban pedig nincs szélsőértéke.

(f) A parciális deriváltak: $\partial_1 f(x, y) = 2x - 2y = 0$, $\partial_2 f(x, y) = 2y - 2x = 0$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = y$, vagyis az $f'(x, y) = 0$ egyenletnek az (x_0, x_0) típusú pontok tesznek eleget. A második derivált:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = f''(x_0, x_0).$$

Azonban itt $\det f''(x_0, x_0) = 0$, azaz a mátrix most csak szemidefinit, így nem alkalmazható az eddigi módszer. Azonban tetszőleges (x_0, x_0) pontra

$$f(x_0, x_0) = 0 \leq (x - y)^2 = f(x, y),$$

vagyis az (x_0, x_0) pont lokális (sőt globális) minimum (de nem szigorú minimum).

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f primitív függvényén egy olyan $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re. Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik.

1. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

$$(a) \quad f(x, y) = (x, y) \quad (b) \quad f(x, y) = (x^2 + xy^2, x^2y + y^3) \quad (c) \quad f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Megoldás. Ha van primitív függvény, azaz van olyan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\partial_1 F = f_1$ és $\partial_2 F = f_2$, akkor

$$F(x, y) = \int f_1(x, y) dx + c(y),$$

ahol a $c(y)$ függvény a

$$\partial_2 F = \partial_2 \left(\int f_1(x, y) dx + c(y) \right) = f_2.$$

összefüggésből határozható meg.

$$(a) \quad F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$\int f_1(x, y) dx = \int (x^2 + xy^2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y),$$

így

$$f_2(x, y) = x^2y + y^3 = \partial_y \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y) \right),$$

azaz $c'(y) = y^3$, vagyis $c(y) = \frac{y^4}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Így a primitív függvény

$$F(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C.$$

(c)

$$\int f_1(x, y) dx = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c(y),$$

így

$$f_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} = \partial_y \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c(y) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y + c'(y),$$

azaz $c'(y) = 0$, vagyis $c(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Így a primitív függvény

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C.$$

9. gyakorlat

Ha $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, akkor az ívhossza

$$l(\varphi) = \int_a^b |\dot{\varphi}(t)| dt.$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a, b]) \subset \Omega$. Ekkor az f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_{\varphi} f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt$$

valós integrált értjük. Ha f -nek létezik Ω -ban F primitív függvénye, akkor

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f -nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a) = \varphi(b)$) f vonalintegrálja φ mentén 0.

1. Számítsuk ki az $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3}$ függvény grafikonjának ívhosszát.

Megoldás. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az ívhossza nem más, mint a $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (t, f(t))$ görbe ívhossza, tehát

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \frac{4}{9} \int_0^4 \frac{9}{4} \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2} dt = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) \approx 9,07.$$

2. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, ahol $a > 0$.

Megoldás. A görbe ívhosszának képletét felírva

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{(3a \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt &= \\ \int_0^{2\pi} 3a \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt &= \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 3a [-\cos 2t]_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t, r \cos t, r \sin t)$, ahol $h, r > 0$.

Megoldás.

$$l(\varphi) = \int_0^h \sqrt{1 + r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2} dt = \int_0^h \sqrt{1 + r^2} dt = \sqrt{1 + r^2} \int_0^h 1 dt = h\sqrt{1 + r^2}.$$

4. Számítsuk ki az $\int_{\varphi} f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x, y) = (-y, x)$.

Megoldás. $\dot{\varphi}(t) = (-\sin t, \cos t)$, így

$$\int_{\varphi} f = \int_0^{\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{\pi} (\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi.$$

5. Számítsuk ki az $\int_{\varphi} f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1, 2t)$ (az $(1, 0)$ és $(1, 2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x, y) = (e^{-x^2+y}, 1)$.

Megoldás.

$$\int_{\varphi} f = \int_0^1 \langle (e^{-1+2t}, 1), (0, 2) \rangle dt = 2.$$

6. Számítsuk ki az $\int_{\varphi} f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$.

Megoldás. Az f függvény egy primitív függvénye $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$, így

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = 0.$$

Zárt görbe mentén minden primitív függvénnyel rendelkező függvény vonalintegrálja zérus.

7. Számítsuk ki az $\int_{\varphi} f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3 \cos t, \sin t)$ és

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Megoldás. Korábban láttuk, hogy f egy primitív függvénye $F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Ezért

$$\int_{\varphi} f = \frac{1}{2} \ln(0^2 + 1^2) - \frac{1}{2} \ln(3^2 + 0^2) = -\frac{1}{2} \ln 9 = -\ln 3.$$

10. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

2. Tétel (Fubini). Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülől folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

halmazt (az x -tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y -tengelyre nézve normáltartomány.

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

(a) $\int_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;

(b) $\int_D \sin y dx dy$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;

(c) $\int_D (\sqrt{x} + y)^2 dx dy$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(d) $\int_D \cos x \cos y \cos z dx dy dz$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$;

(e) $\int_D \cos(x + z) dx dy dz$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Megoldás. (a)

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \int_1^2 x^2 dx dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 dy = \frac{7}{3} \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{7}{3} [\arctg y]_0^1 = \frac{7\pi}{12}.$$

(b)

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \sin y dx dy = \int_{-1}^1 \sin y \int_0^1 1 dx dy = \int_{-1}^1 \sin y \cdot 1 dy = 0,$$

mert 0 középső intervallumon páratlan függvény integrálja zérus.

(c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x} + y)^2 dy dx &= \int_0^1 \left[\frac{(\sqrt{x} + y)^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{3} \left((\sqrt{x} + 1)^3 - (\sqrt{x})^3 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x + \sqrt{x} + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{1}{3} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \cos z dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \cos z \int_0^{\pi/2} \cos y \int_0^{\pi/2} \cos x dx dy dz = \left(\int_0^{\pi/2} \cos x dx \right)^3 = 1.$$

(e)

$$\begin{aligned} \int_D \cos(x+z) dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(x+z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\sin(x+z)]_{x=0}^{\pi/2} dy dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \sin z \right) dz = \frac{\pi}{2} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos z \right]_{z=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

(a) $f(x, y) = 1, N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x^2\};$

(b) $f(x, y) = xy^2, N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\};$

(c) $f(x, y) = \sqrt{y}, N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq (1 - x)^2\}.$

Megoldás. (a)

$$\int_{N_x} f = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 1 dy dx = \int_0^1 [y]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(b)

$$\int_{N_x} f = \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 - x^7 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}.$$

(c)

$$\int_{N_x} f = \int_{-1}^1 \int_0^{(1-x)^2} \sqrt{y} dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^{(1-x)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (1-x)^3 dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

3. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

Megoldás. A megadott parabola és egyenes az $x = -1$ és $x = 2$ pontban metszik egymást, ezért a normáltartomány most az $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 2], x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$ halmaz lesz.

$$\begin{aligned} \int_{N_x} f &= \int_{-1}^2 \int_{x^2-1}^{x+1} xy dy dx = \int_{-1}^2 x \int_{x^2-1}^{x+1} y dy dx \\ &= \int_{-1}^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-1}^{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -x^5 + 3x^3 + 2x^2 dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

11. gyakorlat

Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x, y) : T \rightarrow Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_Q f = \int_T f(g_1(u, v), g_2(u, v)) |\det(g'(u, v))| du dv,$$

ahol tehát a g leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha például egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Ekkor

$$\det(g'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

és így

$$\int_Q f = \int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi.$$

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ a zárt egységkörlap a síkon!

$$(a) \int_D 1 \, dx \, dy \quad (b) \int_D x \, dx \, dy \quad (c) \int_D y^2 \, dx \, dy \quad (d) \int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$$

Megoldás. Polártranszformációval, vagyis az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ($r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) helyettesítéssel

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr.$$

(a)

$$\int_D 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r 2\pi \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \pi.$$

(b)

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cos \varphi r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2 \cdot 0 \, dr = 0.$$

(c)

$$\int_D y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \pi \, dr = \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(d)

$$\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

$$(a) \int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \quad (b) \int_D 6xy^2 \, dx \, dy$$

Megoldás. (a) A megoldást polártranszformációval számolhatjuk ki, vagyis az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ($r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \pi]$) helyettesítéssel, ugyanis D az egységkör $y \geq 0$ félsíkba eső része:

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\pi} r^2 \, d\varphi \, dr = \pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

(b) A megoldást itt is polártranszformációval számolhatjuk ki, azaz az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ($r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \pi]$) helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \int_D 6xy^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\pi} 6r \cos \varphi r^2 \sin^2 \varphi r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 6r^4 \int_0^{\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 6r^4 \left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\pi} dr = \int_0^1 0 \, dr = 0. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$ görbék által határolt síkidom területét!

Megoldás. A keresett síkidom területe nem más, mint a konstans 1 függvény integrálja a fenti egyenesek által közrefogott síkidomon. Legyen $u = x + y$ és $v = y/x$, a fentiek szerint a síkidom pontjaira $u \in [1, 2]$ és $v \in [3, 4]$ teljesül. Legyen g az a függvény, amely a $T = [1, 2] \times [3, 4]$ téglalapot a keresett Q síkidomra képezi:

$$g(u, v) = \left(\frac{u}{v+1}, \frac{uv}{v+1} \right).$$

A g függvény deriváltjának determinánása:

$$\det g'(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^3} + \frac{uv}{(v+1)^3} = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

A keresett terület tehát

$$\int_Q 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_3^4 \frac{u}{(v+1)^2} \, dv \, du = \int_1^2 u \left[-\frac{1}{v+1} \right]_3^4 \, du = \frac{1}{20} \int_1^2 u \, du = \frac{3}{40}.$$

Előadáson

2. ZH