Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2

1. gyakorlat

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

   (a) $\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 3x^5 - x^2 \,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x$, $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$;

   (b) $\int_0^2 xe^x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^3 \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x$;

   (c) $\int_1^2 (3x+4)^3 \,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} \,\mathrm{d}x$.

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 4 - x^2\}$;

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le x + 2\}$;

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$;

   (d) az $y = \sin x$ és az $y = (2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom az első síknegyedben.

2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények primitív függvényeit!

   (a)

   (i) $\int \frac{1}{x+3} \,\mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{1}{(x-3)^4} \,\mathrm{d}x$ (iii) $\int \frac{3x+6}{5x-1} \,\mathrm{d}x$

   (b)

   (i) $\int \frac{2x}{x^2+9} \,\mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+27} \,\mathrm{d}x$ (iii) $\int \frac{6x^2-2}{x^3-x+18} \,\mathrm{d}x$

   (c)

   (i) $\int \frac{1}{x^2+2x+2} \,\mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+25} \,\mathrm{d}x$

   (d)

   (i) $\int \frac{1}{2x^2-3x+1} \,\mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} \,\mathrm{d}x$

2. Számítsuk ki az alábbi függvények primitív függvényeit!

   (a) $\int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ (c) $\int \sqrt{x^2-1} \,\mathrm{d}x$

   (d) $\int \sqrt{4-x^2} \,\mathrm{d}x$ (e) $\int \sqrt{-x^2+4x-3} \,\mathrm{d}x$ (f) $\int \sqrt{x^2+2x+5} \,\mathrm{d}x$

3. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{(a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(e)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(f)}\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(g)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

2. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{1}{x^2} \qquad \text{(c)}\ \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)}\ \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{(e)}\ \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

3. Milyen valós α-ra lesznek konvergensek az alábbi improprius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$\text{(a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

4. gyakorlat

A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az $S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ tagokból álló (S_k), ún. részletösszeg-sorozat konvergens. Ebben az esetben ezt a határértéket a sor összegének nevezzük.

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek. Mi a sorok összege?

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q|<1) \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

3. Mutassuk meg, hogy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor.

4. Állapítsuk meg gyök- vagy hányadoskritériummal, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \qquad \text{(e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \qquad \text{(f)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1000+k}{2k+1}$$

Noha a gyökkritérium erősebb, mégis érdemesebb a számolást a hányadoskritériummal kezdeni, mert sok esetben könnyen lehet egyszerűsíteni. Az itt szereplő feladatok gyökkritériummal is kijönnek, ám ehhez tudni kell bizonyos sorozatok határértékeit. Például az (a) feladatra a gyökkritériummal oda jutnánk, hogy a $\sqrt[n]{n!}$ sorozat határértékét kellene tudnunk (amit egyébként tudhatunk is: ez $+\infty$), a (c), (d) és (e) feladatoknál pedig az $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ sorozat határértéke jön elő (amiről belátható, hogy $1/e$-vel egyenlő).

5. Állapítsuk meg az összehasonlító kritériumok alapján, hogy konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\text{(a)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \qquad \text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$$

5. gyakorlat

Ha (a_n) egy adott számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám, akkor az

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük. Azon x pontok halmazát, ahol a fenti sor konvergens, a hatványsor konvergenciahalmazának hívjuk. Például $x = x_0$ esetén a fenti sor biztosan konvergál (hiszen az összegben az első kivételével minden tag nulla). Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú, R sugarú intervallum. Ha létezik a $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor ez a sugár az

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

képlettel számolható. Ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R-re egy hasonló képlet.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy végtelen sokszor differenciálható függvény, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

hatványsort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. Előadáson szerepel néhány nevezetes ($x_0 = 0$-hoz tartozó) Taylor-sor, ezek a következők:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots
\end{aligned}$$

ahol a fenti Taylor-sorok egész $\mathbb{R}$-en konvergensek (és ott elő is állítják a függvényeket), míg az alábbi sor-előállítás csak a $(-1, 1]$ intervallumon érvényes:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ezeken kívül még érdemes ismerni a mértani sor összegét is:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad \text{ahol } x \in (-1, 1).$$

1. Állítsuk elő deriválással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,
   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.
2. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \ln(1+x)$,
   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

3. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 középű Taylor-sorát!

$$\text{(a)}\quad \sin x^2 \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{(c)}\quad e^{-x} \qquad \text{(d)}\quad xe^{-x} \qquad \text{(e)}\quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

4. Írjuk fel az alábbi függvények 0 középű Taylor-sorát!

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{1-4x^2} \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{arc\,tg} x$$

A következő feladathoz hasznos lesz az ún. Lagrange-maradéktagos Taylor-formula: ha f az $[a,x]$ intervallumban $(n+1)$-szer differenciálható, akkor létezik olyan $\xi \in (a,x)$ szám, melyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

vagyis f felírható $f = T_n + R_n$ alakban, ahol T_n az (a ponthoz tartozó) n-edik Taylor-polinom, R_n pedig a maradéktag.

5. (a) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon e^x kiszámításához az

$$\text{(i)}\quad e^x \approx 1+x, \qquad \text{(ii)}\quad e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$$

közelítő képleteket használjuk?

(b) i. Miért mondják azt, hogy „kis x esetén $\sin x \approx x$”? Határozzuk meg azt az I intervallumot, melyre érvényes, hogy $x \in I$ esetén $|\sin x - x| \leq 0,01$!

ii. Mutassuk meg, hogy ha az $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

közelítő képletet használjuk, akkor legfeljebb $0,005$ hibát követünk el! Ellenőrizzük ezt például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén!

6. Írjuk fel 0 középű hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!

6. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t \qquad (n = 0,1,2\ldots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0, 2\pi]$ intervallumot is, ekkor a fenti definíciók értelemszerűen módosulnának). A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!

(a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

(c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$

(d) $f(x) = \big(\pi - |x|\big)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$

ELŐADÁSON

1. ZH

7. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = x^2 \qquad \text{(b)} \quad f(x,y) = y^3 \qquad \text{(c)} \quad f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$\text{(d)} \quad f(x,y) = x^2y^4 \qquad \text{(e)} \quad f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(f)} \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{e^y}$$

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_3 f$, $\partial_1\partial_2\partial_3 f$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:

   (a) $f(x, y, z) = 5z$;

   (b) $f(x, y, z) = x + y + z$;

   (c) $f(x, y, z) = ze^{x-y}$.

3. Mi lesz a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa, ha $g(x, y) =$

$$\text{(a)} \quad (x,\ y) \qquad \text{(b)} \quad \big(x^4 + x^2y^2 + y^4,\ x^4 + x^2y^2 + y^4\big) \qquad \text{(c)} \quad (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$$

$$\text{(d)} \quad \Big(e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} \cos y,\ e^x \sin\big(y + \ln 2y\big)\Big)$$

4. Számítsuk ki $f'(x, y, z)$-t, ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) =$

$$\text{(a)} \quad (x^2y,\ y + z) \qquad \text{(b)} \quad \big(x^y,\ x^{y^z}\big)$$

5. Számítsuk ki $f''(3, 4)$-et, ahol

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = xy \qquad \text{(b)} \quad f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \qquad \text{(c)} \quad f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\big(x^2 + y^2\big)$$

6. Mutassuk meg, hogy ha $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, illetve $u(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0.$$

8. gyakorlat

Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$, azaz $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban és $\partial_j f(a) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, akkor az $f''(a)$ mátrix pozitív definitsége esetén a-ban szigorú lokális minimum, az $f''(a)$ mátrix negatív definitsége esetén a-ban szigorú lokális maximum van. Ha az $f''(a)$ mátrix indefinit, akkor az a pontban nincs szélsőérték.

Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor

(i) A pozitív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} > 0$,

(ii) A negatív definit, ha $\det A > 0$ és $a_{11} < 0$,

(iii) A indefinit, ha $\det A < 0$.

1. Keressük meg az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!
   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
   (b) $f(x,y) = (x^2+1)(y + \frac{1}{y})$;
   (c) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$;
   (d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
   (e) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
   (f) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Az f primitív függvényén egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik.

1. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

   (a) $f(x,y) = (x,\ y)$ (b) $f(x,y) = \big(x^2 + xy^2,\ x^2y + y^3\big)$ (c) $f(x,y) = \Big(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\Big)$

9. gyakorlat

Ha $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, akkor az ívhossza

$$l(\varphi) = \int_a^b |\dot\varphi(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a,b]) \subset \Omega$. Ekkor az f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\ \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük. Ha f-nek létezik Ω-ban F primitív függvénye, akkor

$$\int_\varphi f = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a) = \varphi(b)$) f vonalintegrálja φ mentén 0.

1. Számítsuk ki az $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3}$ függény grafikonjának ívhosszát.
2. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.
3. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.
4. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x,y) = (-y,\ x)$.
5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1,0)$ és $(1,2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x,y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$.
6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x,y) = (x+y,\ x+y)$.

7. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

10. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

2. Tétel (Fubini). *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a,b] \times [c,d]$. Ekkor*

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right)\ dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!
   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [1,2] \times [0,1]$;
   (b) $\displaystyle\int_D \sin y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1] \times [-1,1]$;
   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x}+y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ahol $D = [0,1] \times [0,1]$;
   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$;
   (e) $\displaystyle\int_D \cos(x+z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ahol $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.
2. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
   (a) $f(x,y) = 1$, $N_x := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1-x^2\right\}$;
   (b) $f(x,y) = xy^2$, $N_x := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\right\}$;
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y}$, $N_x := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1],\ 0 \le y \le (1-x)^2\right\}$.
3. Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

11. gyakorlat

Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $g(x,y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_Q f = \int_T f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \left|\det\left(g'(u,v)\right)\right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v,$$

ahol tehát a g leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyilván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha például egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, $T = [0,R] \times [0, 2\pi]$ és $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, \; r\sin\varphi)$. Ekkor

$$\det(g'(r,\varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

és így

$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi.$$

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ a zárt egységkörlap a síkon!

   (a) $\displaystyle\int_D 1 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int_D x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (c) $\displaystyle\int_D y^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (d) $\displaystyle\int_D x^2 + y^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq 0\right\}$.

   (a) $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ (b) $\displaystyle\int_D 6xy^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

3. Számítsuk ki az $x + y = 1, \; x + y = 2, \; y = 3x, \; y = 4x$ görbék által határolt síkidom területét!

ELŐADÁSON

2. ZH