Elméleti fizikai módszerek a környezettudományban
8. gyakorlat

- **Elsőrendű lineáris állandóegyütthatós differenciálegyenletek:** $y' + by = g(x)$
  - homogén egyenlet megoldása: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + by = 0 \quad \Rightarrow$ szétválasztható $\Rightarrow$ $y_h = C \cdot e^{-bx}$
  - inhomogén egyenlet megoldása: $y_p \to$ behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe
    - *állandó variálásának módszere*: $y_p' = C(x)y_h$ ($y_p = C'(x)y_h + C(x)y_h'$)
    - *próbafüggvény módszere*: pl.
      $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y_p = Ax^2 + Bx + C$
      $g(x) = \sin(\alpha x + \beta) \quad \Rightarrow \quad y_p = A\sin(\alpha x + \beta) + B\cos(\alpha x + \beta)$
      $g(x) = e^{2x} + \sin x \quad \Rightarrow \quad y_p = Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x$
      $g(x) = x^2 e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$
      rezonancia esetén: $\cdot x$
    - $y = y_h + y_p$

- **Másodrendű lineáris állandóegyütthatós differenciálegyenletek:** $ay'' + by' + c = g(x)$
  - homogén egyenlet megoldása: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow$
    $ay'' + by + c = 0$
    $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet
    - ha $b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
    - ha $b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
    - ha $b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \Rightarrow \quad y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
  - inhomogén egyenlet megoldása: $y_p \to$ behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe
    - *próbafüggvény módszere* (rezonancia esetén: $\cdot x$)
    - $y = y_h + y_p$

---

1. $y' - y = x$
2. $y' - 4y = 8x^3 - 3x + 1$
3. $2y' - y = \sin(2x)$
4. $y' - 2y = 3e^{2x}$

5. $y'' - 8y' + 16y = 0$
6. $y'' - y' - 6y = 0$
7. $4y'' + 4y' + 37y = 0$

8. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$
9. $y'' + 4y = \cos(2x)$

Házi feladat

1. Keresd meg az $y'' - 2y' + y = e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását (rezonancia)!
2. Keresd meg az $y' - \dfrac{y}{x-2} = 2(x-1)^3$ differenciálegyenlet általános megoldását!
3. Oldd meg az $y'' + y = \sin x$ differenciálegyenletet, ahol $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$!