

ELMÉLETI FIZIKAI MÓDSZEREK A KÖRNYEZETTUDOMÁNYBAN

6. gyakorlat

Közönséges differenciálegyenletek: $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

- **rend:** egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendszáma
- **lineáris:** y és deriváltjai legfeljebb az 1. hatványon és nem szerepel a szorzatuk \longleftrightarrow **nem lineáris**
- **homogén:** nincs állandó tag vagy amelyben *csak* x szerepel \longleftrightarrow **inhomogén**
- **állandó együtthatós:** y -t és deriváltjait tartalmazó tagok együtthatói állandók \longleftrightarrow **függvényegyütthatós**
- **megoldások:** függvények, amelyek a deriváltjaikkal együtt kielégítik a differenciálegyenletet
 - *általános megoldás:* n -ed rendű KDE-re n db egymástól független paramétert tartalmaz: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots)$
 - *partikuláris megoldás:* n -ed rendű KDE-re $\leq n - 1$ db egymástól független paramétert tartalmaz (spec. esetben 1-et sem) \leftarrow kezdeti feltételek: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \text{ stb.}$

• Szétválasztható típusú differenciálegyenletek

$$\begin{array}{llll} \frac{dy}{dx} = f(x) & \longrightarrow & y(x) = \int f(x) dx, & \frac{dy}{dx} = f(x) \text{ és } y(x_0) = y_0 & \longrightarrow & y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx \\ \frac{dy}{dx} = g(y) & \longrightarrow & x(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy, & \frac{dy}{dx} = g(y) \text{ és } y(x_0) = y_0 & \longrightarrow & x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(y)} dy \\ \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) & \longrightarrow & \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx, & \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ és } y(x_0) = y_0 & \longrightarrow & \int_{y_0}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x f(x) dx \end{array}$$

1. $y' = -y$. $y(x) = Ce^{-x}$ megoldás? ($C \in \mathbb{R}$)

2. $y' + 2xy^2 = 0$. $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ megoldás?

3. $y'' - 4y' + 4y = e^x - 1$.
 $y(x) = Ce^{2x}$ megoldás?
 $y(x) = xe^{2x} + e^x$ megoldás?

4. $y' = \frac{1}{y^2}$

5. $y' = \frac{1}{x+1}$, $y(0) = 1$

6. $y' = (5x^2 - 3x + 2) \ln x$

7. $y' = -\frac{x^3}{(y+1)^2}$

8. $y' = \frac{1-x}{y}$, $y(1) = 2$

9. $y' = -\frac{\sin x}{y}$, $y(0) = -2$

10. $e^x \cos y \, dx + (1 + e^x) \sin y \, dy = 0, y(0) = 0$
 11. Radioaktív anyag tömege $t = 0$ -ban m_0 . $m(t) = ?$, ha a bomlási sebesség arányos a tömeggel és a felezési idő 1600 év?
 12. Egy vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Határozzuk meg a gömb alakú vízcsepp sugarát az idő függvényében, ha $r(0) = R$!
 13. $(x^2 - 2x)y' = xy + x - y - 1$
 14. $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$
-

HÁZI FELADAT

1. Keresd meg az $x(y^2 - 1) \, dx + y(x^2 - 1) \, dy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!
2. Oldd meg az $(y^2 - 1) \, dx - (2y + xy) \, dy = 0$ differenciálegyenletet!
3. Oldd meg az $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$ differenciálegyenletet!