Elméleti fizikai módszerek a környezettudományban
4. gyakorlat

- **Ívhossz**
  - Legyen $\varphi : [a, b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe.
    $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $|\dot\varphi(t)| = \sqrt{(\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2 + (\dot z(t))^2}$
    A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b |\dot\varphi(t)|\, dt$
  - $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe esetén: $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$
    A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\dot t^2 + (\dot f(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot f(t))^2} dt$.

- **Vonalintegrál**
  - f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálja: $\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\, dt$
  - f-nek létezik primitív függvénye ($F' = f$, vagyis $\partial_i F = f_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re), ha az $f' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus
  - Primitív függvény számítása $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esetén $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
    $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \int f_1(x, y)dx + c(y)$
    $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \int f_1(x,y)dx + c(y)}{\partial y} = f_2(x, y) \Rightarrow c(y)$ meghatározható
  - Ha f-nek létezik primitív függvénye: $\int_\varphi f = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b))$
    (F függvény az f potenciálfüggvénye) $\Rightarrow \sim$ munka
  - Ha f-nek van potenciálfüggvénye, akkor zárt görbe esetén f vonalintegrálja φ mentén 0 ($\oint_\varphi f = 0$)

- **Többváltozós integrál kiszámítása**
  - Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámítása téglalapon: lebontási tétel (Fubini-tétel): Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$.
    $$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$$
  - Alulról és felülről folytonos függvények határolta síkidomon: Ha $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor
    $$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy\right) dx$$
    Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

---

1. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.
2. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.
3. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ görbe ívhosszát.
4. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x, y) = (-y, x)$!

5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1,0)$ és $(1,2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x,y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$!

6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x,y) = (x+y,\ x+y)$!

7. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$!

8. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1+y^2}$, ahol $D = [1,2] \times [0,1]$;

   (b) $\displaystyle\int_D \sin y$, ahol $D = [0,1] \times [-1,1]$;

   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x}+y)^2$, ahol $D = [0,1] \times [0,1]$;

   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z$, ahol $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.

   (e) $\displaystyle\int_D \cos(x+z) dxdydz$, ahol $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.

9. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

   (a) $N_x := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1 - x^2\right\}$, $f(x,y) = 1$.

   (b) $N_x := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1],\ 0 \le y \le (1-x)^2\right\}$, $f(x,y) = \sqrt{y}$.

   (c) Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.