Elméleti fizikai módszerek a környezettudományban
Összefoglalás (grad, div, rot és differenciálegyenletek)

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{v} = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$
  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vagy $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  $\varphi(x, y, z)$ skalár

- vektor-skalár fv.: $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z) = xy \sin z + e^{\sqrt{x}y}$
  vektor-vektor fv.: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z) = (x^y, \cos(xy), -y \sin z^3) = x^y\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + (-y \sin z^3)\mathbf{k}$

- skalárszorzat: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$
  vektoriális szorzat:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

- differenciáloperátorok: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$

  gradiens: $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}) = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$
  $(\mathrm{grad}\varphi)_i = \partial_i\varphi$

  divergencia: $\mathrm{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum \partial_i v_i$
  $\mathrm{div}\mathbf{v} = \sum \partial_i v_i$

$$\text{rotáció: } \mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{rot}\mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{, ha } ijk = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{, ha legalább 2 megegyezik közülük} \end{cases}$$

  Laplace-operátor: $\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \sum \partial_i^2$

- **Szétválasztható típusú differenciálegyenletek**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \longrightarrow y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \text{ és } y(x_0) = y_0 \longrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \longrightarrow x(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \text{ és } y(x_0) = y_0 \longrightarrow x(y) = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \longrightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \text{ és } y(x_0) = y_0 \longrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Szétválasztható típusúra visszavezethető differenciálegyenletek:**

$$
\begin{aligned}
y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \\
u(x) &= \frac{y(x)}{x} \\
y(x) &= x \cdot u(x) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= f(u) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(u) - u}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= f(ax + by + c) \\
u(x) &= ax + by(x) + c \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= a + b \cdot f(u)
\end{aligned}
$$

- **Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek:** $y' + f(x)y = g(x)$
  - homogén egyenlet megoldása: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + f(x)y = 0 \quad \Rightarrow$ szétválasztható $\Rightarrow$ $y_h = C \cdot e^{-\int f(x)dx}$
  - inhomogén egyenlet megoldása: $y_p \to$ behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe
    - *állandó variálásának módszere*: $y_p' = C(x)y_h$ $(y_p' = C'(x)y_h + C(x)y_h')$
    - *próbafüggvény módszere* állandó együtthatós lin. diff.egyenleteknél $(ay' + by = g(x))$: pl.
      $g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y_p = Ax^2 + Bx + C$
      $g(x) = \sin(\alpha x + \beta) \quad \Rightarrow \quad y_p = A\sin(\alpha x + \beta) + B\cos(\alpha x + \beta)$
      $g(x) = e^{2x} + \sin x \quad \Rightarrow \quad y_p = Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x$
      $g(x) = x^2 e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$
    - $y = y_h + y_p$

- **Másodrendű lineáris állandóegyütthatós differenciálegyenletek:** $ay'' + by' + c = g(x)$
  - homogén egyenlet megoldása: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow$
    $ay'' + by + c = 0$
    $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet
    - ha $b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
    - ha $b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
    - ha $b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \Rightarrow \quad y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
  - inhomogén egyenlet megoldása: $y_p \to$ behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe
    - *próbafüggvény módszere* (rezonancia esetén: $\cdot x$)
    - $y = y_h + y_p$