Elméleti fizikai módszerek a környezettudományban
Összefoglalás (integrálás)

- **Integrálás 1D-ban**
  - Newton–Leibniz-szabály: $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
  - Parciális integrálás: $\int f'g = fg - \int fg'$
  - Helyettesítéses integrálás: $x = g(t), \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ \mathrm{d}t$
  - Racionális törtfüggvények integrálása:
    - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
    - $\int f^n(x) f'(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
    - ha a nevező$= (x-a)(x-b)\cdots \Rightarrow$ törtek összegére bontás $\Rightarrow$ $\ln|x-a| + \ln|x-b| + \ldots$
    - ha nincs zérushely: $\Rightarrow \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-a}{b}\right) \cdot b + C$
  - Gyökös függvények integrálása $\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C} \Rightarrow \sqrt{\pm\left(\frac{x\pm a}{b}\right)^2 \pm 1}\right)$:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$
$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \qquad \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t$$
$$(2\sin x \cos x = \sin 2t) \qquad (2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2t)$$
$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \qquad \operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2t)$$
$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \qquad \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t - 1)$$

  összefüggések segítségével, $\frac{x\pm a}{b} = \sin t, \cos t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel

  - Improprius integrálok:
    - $f : [a,\infty) \to \mathbb{R} : \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$
    - $f : [a,b) \to \mathbb{R} : \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$

- **Ívhossz**
  - Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe.
    $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $|\dot\varphi(t)| = \sqrt{(\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2 + (\dot z(t))^2}$
    A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b |\dot\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$
  - $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ görbe esetén: $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$
    A görbe ívhossza: $l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\dot t^2 + (\dot f(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (\dot f(t))^2}\ \mathrm{d}t$.

- **Vonalintegrál**
  - f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálja: $\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle \ \mathrm{d}t$
  - f-nek létezik primitív függvénye ($F' = f$, vagyis $\partial_i F = f_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re), ha az $f' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus
  - Primitív függvény számítása $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esetén $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
    $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int f_1(x,y)dx + c(y)$
    $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \int f_1(x,y)\ \mathrm{d}x + c(y)}{\partial y} = f_2(x,y) \Rightarrow c(y)$ meghatározható
  - Ha f-nek létezik primitív függvénye: $\int_\varphi f = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b))$
    (F függvény az f potenciálfüggvénye) $\Rightarrow \sim$ munka
  - Ha f-nek van potenciálfüggvénye, akkor zárt görbe esetén f vonalintegrálja φ mentén 0 ($\oint_\varphi f = 0$)

- **Többváltozós integrál kiszámítása**
  - Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámítása téglalapon: lebontási tétel (Fubini-tétel): Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a,b] \times [c,d]$.

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \ \mathrm{d}x \right) \ \mathrm{d}y$$

  - Alulról és felülről folytonos függvények határolta síkidomon: Ha $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $N_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$ halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x$$

    Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.